21 Przykłady całkowania-cd

Całki zawierające logarytm na ogół całkujemy przez części, np. $n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow$

$$\int x^n \ln(ax)\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(ax) - \int \frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{a}{ax}\,dx = x^{n+1}\Big(\frac{\ln(ax)}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\Big) + C.$$

$$\int (\ln(ax))^2\,dx = x\ln^2 ax - \int x \cdot 2a\ln(ax)\cdot\frac{dx}{ax}\,dx = x\big(\ln^2 ax - 2\ln ax + 2\big) + C.$$

Czasami całkujemy podstawiając za logarytm, np.

$$\int \frac{\ln ax}{x}\,dx = \frac{1}{2}(\ln^2 ax) + C, \qquad \int \frac{1}{x\ln ax}\,dx = \ln|\ln ax| + C.$$

Ale już gdy potęga x w mianowniku ma wykładnik $k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, to całkujemy przez części, np.

$$\int \frac{\ln ax}{x^3}\,dx = -\frac{1}{2x^2}(\ln ax + \frac{1}{2}) + C.$$

Całki $\int \frac{e^x}{x}\,dx$ nie da się wyliczyć przy użyciu funkcji elementarnych, jest to funkcja transcendentna Ei(x) (z dokładnocią do stałej), podobnie, jak funkcja erf(x) związana z $\int e^{-x^2}\,dx$ i z rozkładem normalnym ('Error function"). Nie można też wyrazić $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$ przez funkcje elementarne.

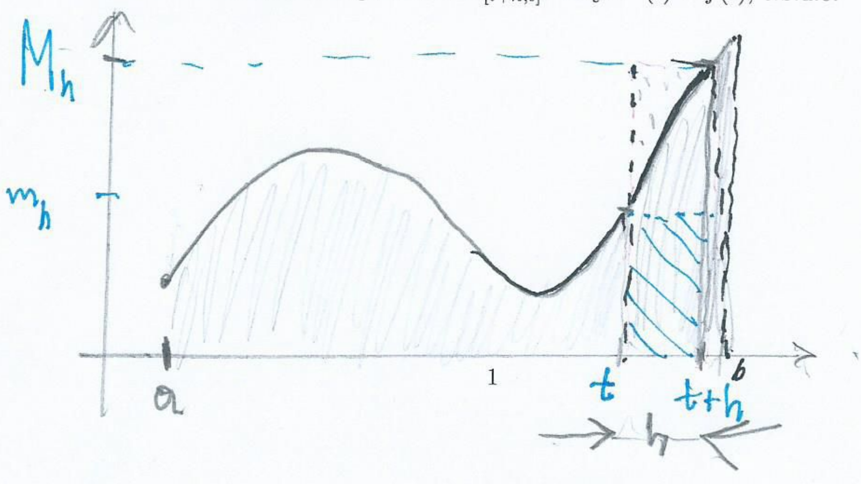
Tym niemniej, niedługo zdefiniujemy całkę oznaczoną i przy jej użyciu wykażemy, że każda funkcja ciągła $f \in C[a,b]$ ma funkcję pierwotną.

Naszkicuję teraz "prowizoryczny dowód" zakładając dodatkowo, że $f \geqslant 0$, co nie zmniejsza ogólnosci. (Bo f jest ograniczona i dodając pewną stałą K do f zapewnimy jej nieujemność, potem skorzystamy z liniowości i odejmując od otrzymanej pierwotnej dla $K + f(x)$ funkcję $K \cdot x$ otrzymamy pierwotną dla f.)

Dla $t \in [a,b]$ niech $F(x)$ oznacza pole figury płaskiej (rys. na dole strony)

$$D_{[a,t]} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant f(x), a \leqslant x \leqslant t\}.$$

Problem w tym, że jeszcze nie zdefiniowaliśmy miary Jordana i pola figury płaskiej, jest to więc szkic -a nie pełny dowód. Jeśli $h > 0$ oraz $a \leqslant t < t+h \leqslant b$, to niech $m_h = \min\{f(x) : x \in [t, t+h]\}$, zaś $M_h := \max\{f(x) : x \in [t, t+h]\}$. Dzieląc figurę $D_{[a,t+h]}$ na sumę 2 części: $D_{[a,t]}$ oraz$D_{[t,t+h]}$, których pola powinny się sumować do pola całej $D_{[a,t+h]}$ zauważamy, że wówczas przyrost $F(t+h) - F(t)$ jest równy polu figury $D_{[t,t+h]}$, a to pole jest $\leqslant$ od $h \cdot M_h$ -czyli od pola prostokąta $[t, t+h] \times [0, M_h]$ zawierającego $D_{[t,t+h]}$ oraz jest $\geqslant$ od $h \cdot m_h$ (pola prostokąta zawartego w tej figurze. Stąd iloraz różnicowy: $\frac{F(t+h)-F(t)}{h}$ należy do przedziału $[m_h, M_h]$. Z ciągłości f w punkcie t wynika zmierzanie obydwu tych wartości do $f(t)$ przy $h \to 0$. Z twierdzenia o 3 granicach, do $f(t)$ zmierza więc ten iloraz różnicowy. (Dla $h < 0$ postępujemy podobnie, wówczas $D_{[a,t]}$ przedstawiamy jako sumę $D_{[a,t+h]} \cup D_{[t+h,t]}$, a pola odpowiednich prostokątów, to $(-h) \cdot m_h$ oraz $(-h) \cdot M_h$, przyrost $F(t+h) - F(t)$ jest polem **ale ze znaiem minus** tego zbioru $D_{[t+h,t]}$. Więc $F'(t) = f(t)$, c.b.d.o.



Może jednak sformułuję teraz pojęcie miary Jordana. Ze względu na późniejsze zastosowania omówimy od razu d–**wymiarową miarę Jordana zbioru ograniczonego** $D \subset \mathbb{R}^d$. To, co niewątpliwie możemy wyliczyć, to miara kostki $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_d, b_d]$, najczęściej będziemy rozważać przypadki $d = 1, 2$ lub 3. Dla $d = 2$ mówimy o polu prostokąta Q (równym $(b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2)$, dla $d = 3$- o objętości prostopadłościanu Q, a dla $d = 1$ -o długości. Dla uproszczenia tę miarę kostki Q oznaczmy przez $|Q|$. Oczywiście, rozważamy tylko kostki o krawędziach równoległych do osi układu.

Kostka może być zdegenerowana, gdy któryś z jej boków ma długość zero i wtedy gdy Q jest zdegenerowana (i tylko wtedy), mamy $|Q| = 0$. Ogólnie definiujemy więc miarę kostki jako liczbę

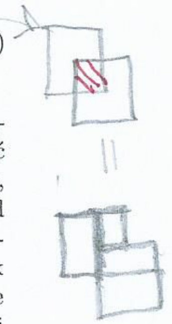
$$|Q| := (b_1 - a_1) \times \cdots \times (b_d - a_d) = \prod_{k=1}^{d} (b_k - a_k).$$

Zbiór pusty też traktujemy jako kostkę, przyjmując $|\emptyset| = 0$. Mówimy, że kostki z danego $Q_1, \ldots, Q_m$ układu mają wnętrza parami rozłączne, gdy dla każdej pary indeksów $j, n \in \{1, \ldots, m\}$

$$j \neq n \Rightarrow |Q_j \cap Q_n| = 0. \qquad (1)$$

Jest to zgodne z ogólną definicją wnętrza- które będzie dla kostki Q iloczynem kartezjańskim odpowiednich przedziałów otwartych (lub zbiorem pustym -dokładnie dla kostek zdegenerowanych). Część wspólna dwu kostek jest kostką, ale może ona być zdegenerowana. Gdy $d = 2$, założenie (1) oznacza, że prostokąty z danego układu mogą albo być rozłączne albo mogą stykać się jedynie wzdłuż boku lub wierzchołka. Sumę mnogościową $\Omega = Q_1 \cup \cdots \cup Q_m$ skończonej ilości kostek o wnętrzach parami rozłącznych nazwiemy **figurą prostą** i dla takich zbiorów definiujemy ich **miarę d-wymiarową** $m_d(\Omega)$ wzorem

$$m_d(\Omega) = \sum_{j=1}^{m} |Q_j|. \qquad (2)$$



Każda suma skończonej ilości kostek nawet niespełniających warunku (1) jest figurą prostą. Każdą figurę prostą można (nawet na wiele sposobów) przedstawić jako sumę układu kostek o wnętrzach parami rozłącznych. Co najważniejsze, otrzymana suma ich miar będzie taka sama -więc definicja (2) nie zależy od sposobu przedstawienia figury Ω jako sumy układu kostek spełniających postulat rozłączności (1). Ten dość oczywisty fakt geometryczny wymaga jednak ścisłego dowodu, który jednak pominiemy. Można to robić metoda indukcji ze względu na ilość kostek, lub metodą wspólnych rozdrobnień (dzielimy kostki na mniejsze fragmenty).

Oczywiście, większość zbiorów $E \subset \mathbb{R}^d$ nie da się przedstawić jako figurę prostą- nawet trójkąt lub obrócony o 45 stopni kwadrat -nie są skończonymi sumami kostek (bo zakładamy równolgłość krawędzi kostek do osi układu). Możemy dowolny zbiór ograniczony przybliżać figurami prostymi na dwa sposoby, które prowadzą do potencjalnie dwu miar: wewnętrznej i zewnętrznej tego zbioru:

Definicja. Miarę wewnętrzną $m_*(E)$ zbioru $E \subset \mathbb{R}^d$ definiujemy wzorem

$$m_*(E) := \sup\{m_d(\Omega) : \Omega \subset E, \Omega = \texttt{figura prosta}\}.$$

Miarę wewnętrzną $m^*(E)$ definiujemy jako kres dolny $\inf m_d(\Omega_1)$ miar figur prostych Ω_1 zawierających zbiór E. Mówimy, że zbiór E jest mierzalny (w sensie Jordana), gdy $m_*(E) = m^*(E)$ i wówczas piszemy $m_d(E) = m_*(E)$.

Podstawową własnością miary powinna być jej addytywność. Można wykazać, że gdy dwa zbiory mierzalne $A, B \subset \mathbb{R}^d$ są rozłączne:

$$A \cap B = \emptyset, \quad \texttt{to wówczas} \; m_d(A \cup B) = m_d(A) + m_d(B). \qquad (3)$$

Suma skończonej ilości zbiorów mierzalych jest zbiorem mierzalnym. Natomiast dla sumy przeliczalnej ilości- już tak nie jest. Na przykład, w przypadku $d = 1$ zbiór liczb wyiernych z oscinka [0,1], czyli $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ jest niemierzalny, chociaż jest sumą ciągu zbiorów 1-elementowych mierzalnych $\{r_j\}$, bo liczby wymierne z odcinka $[0,1]$ można ustawić w ciąg. Ponadto $\forall_j\, m_*(\{r_j\}) = m^*(\{r_j\}) = 0$. Miara wewnętrzna tego zbioru $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ jest równa zero, zewnętrzna jest równa 1. Dla miary wewnętrznej odpowiednik własności (3) nie zachodzi (bo dla $A = \mathbb{Q} \cap [0,1], B = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ jest $m_*(A) = 0 = m_*(B)$, podczas gdy $A \cup B = [0,1]$ ma miarę 1).

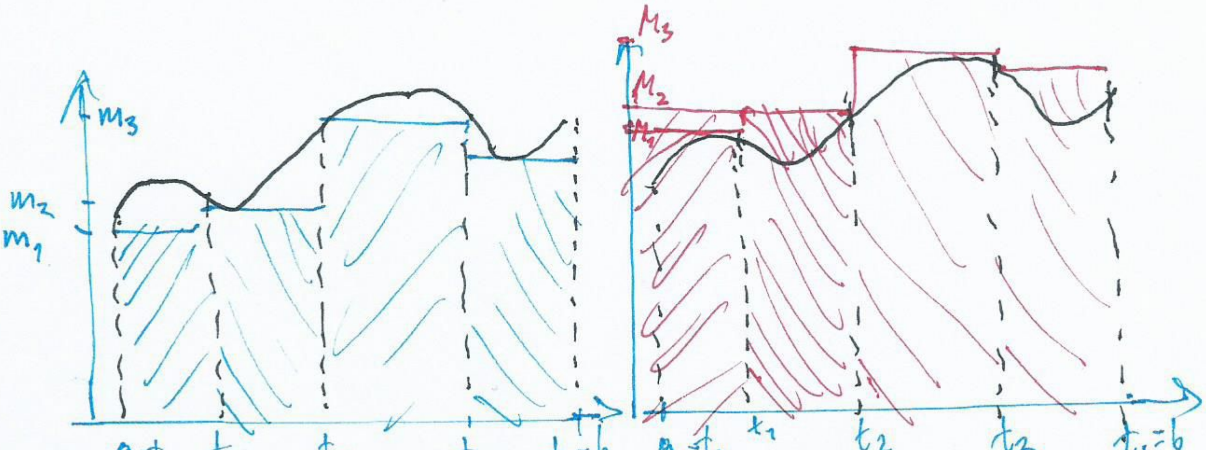
Wracając do zbiorów "pod wykresem funkcji", czyli $D = D_{[a,b]}$ - ich mierzalność można dość łatwo wykazać korzystając z twierdzenia Cantora o jednostajnej ciągłości funkcji ciągłych na przedziale domkniętym. Twierdzenie to mówi, że gdy $f \in C[a,b]$, to

$$\forall_{\epsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{s,t \in [a,b]} |s - t| < \delta \Rightarrow |f(s) - f(t)| < \epsilon. \qquad (4)$$

Tam jako figury proste zawarte w tym zbiorze D możemy wziąć sumy prostokątów $[t_{j-1}, t_j] \times [0, m_j]$, gdzie $m_j = \inf\{f(x) : x \in [t_{j-1}, t_j]\}$, zaś figura prosta zawierająca zbiór D, to suma prostokątów $[t_{j-1}, t_j] \times [0, M_j]$, gdzie $M_j = \sup\{f(x) : x \in [t_{j-1}, t_j]\}$. Te dwie figury są wyznaczone przez układ punktów t_j podziału odcinka $[a, b]$, gdzie $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ na n części. Te części są odcinkami o długości $t_j - t_{j-1}$ i jeżeli (przy ustalonym $\epsilon > 0$) dobierzemy na tyle gęsto punktów podziału, by dla stałej δ spełniającej warunek (4) było $\forall_j t_j - t_{j-1} < \delta$, to będziemy mieli $M_j - m_j < \epsilon$. Faktycznie, jak wiemy (z Tw. Weierstrassa) f osiąga na każdym z przedziałów$[t_{j-1}, t_j]$ swoje wartości największe: M_j w pewnych punktach $\beta_j \in [t_{j-1}, t_j]$. Wartości najmniejsze: m_j są równe $f(\alpha_j)$ dla pwenych $\alpha_j \in [t_{j-1}, t_j]$. A ponieważ $|\beta_j - \alpha_j| < \delta$, z warunku jednostajnej ciągłości (4) wynika, że $M_j - m_j < \epsilon$. Różnica między miarą górną i miarą dolną naszego zbioru D jest więc nie większa, niż

$$\sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)(t_j - t_{j-1}) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \epsilon (t_j - t_{j-1}) = \epsilon \cdot (b - a).$$

Różnica ta jest więc dowolnie mała, a ponieważ jest nieujemna, musi być zerem, co świadczy o mierzalności zbioru D.



pole zakreskowane jest równe:

$\sum_{j=1}^{n} m_j (t_j - t_{j-1})$ $\qquad$ $\sum_{j=1}^{n} M_j \cdot (t_j - t_{j-1})$

Jesteśmy w zasadzie już przygotowani do wprowadzenia definicji całki Riemanna. Na początku określmy pojęcia:

- podziału $\mathcal{T}$ odcinka $[a, b]$,
- średnicy $\delta(\mathcal{T})$ tkiego podziału,
- normalnego ciągu podziałów $\mathcal{T}_n$,
- Układu Λ punktów pośrednich dla $\mathcal{T}$
- sum całkowych $S(f, \mathcal{T}, \Lambda)$

Definicja. (1) Skończony układ punktów $\mathcal{T} = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$ nazywamy **podziałem odcinka** $[a, b]$, gdy $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$. (2) Liczbę $\delta(\mathcal{T}) := \max\{t_j - t_{j-1} : 1 \leqslant j \leqslant n\}$ nazywamy **średnicą tego podziału**. (3) Mówimy, że ciąg podziałów $(\mathcal{T}_n)$ jest **normalny**, gdy $\lim_{n\to\infty} \delta(\mathcal{T}_n) = 0$. (4) Zbiór skończony $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subset [a, b]$ nazywamy układem **punktów pośrednich** dla podziału $\mathcal{T}$, gdy $\forall_j\ \lambda_j \in [t_{j-1}, t_j]$. (4) **Sumę całkową** $S(f, \mathcal{T}, \Lambda)$ dla funkcji f, podziału $\mathcal{T}$ i układu punktów pośrednich Λ definiujemy jako liczbę

$$S(f, \mathcal{T}, \Lambda) := \sum_{j=1}^{n} f(\lambda_j)(t_j - t_{j-1}). \tag{5}$$

Przykład normalnego ciągu podziałów, to podziały $[a, b]$ na n równych części, czyli podziały punktami $t_j = a + \frac{j(b-a)}{n}$. Tutaj $\forall_j t_j - t_{j-1} = \frac{b-a}{n}$ i taka jest też średnica tego podziału. Dla funkcji $f(x) = x$ i dla punktów pośrednich $\lambda_j = t_j$ sumą całkową przy równomiernym podziale $[a, b]$ na n równych części jest

$$\sum_{j=1}^{n}\Big(a + \frac{j(b-a)}{n}\Big)\frac{b-a}{n} = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{n^2}\sum_{j=1}^{n} j = a(b-a) + \frac{(b-a)^2 n(n+1)}{2n^2}.$$

Ostatnie wyrażenie dąży przy $n \to \infty$ do $(a + \frac{b-a}{2})(b-a) = \frac{1}{2}(b+a)(b-a) = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$. Podobna sytuacja ma miejsce dla funkcji $f(x) = x^2$ i w pewnym miejscu trzeba znać wzór na $\sum_{j=1}^{n} j^k$ dla $k = 2$. Taki wzór znamy jedynie dla $k = 1, 2, 3$ ale dla pozostałych $k \in \mathbb{N}$ z pomocą Twierdzenia Stolza można wyznaczyć granicę $\lim \frac{1}{n^{k+1}} \sum_{j=1}^{n} j^k = \frac{1}{k+1}$. Dla większości funkcji takie obliczenia nie są jednak możliwe.

Najprostsze jest wyliczenie sum całkowych dla funkcji stałej: $f(x) = c$. Wartości $f(\lambda_j)$ stale równe c można wyłaczyć przed znak sumy, a pomieważ dla każdego podziału mamy

$$\sum_{j=1}^{n}(t_j - t_{j-1}) = b - a, \tag{6}$$

, więc suma całkowa dla funkcji stałej równej c na odcinku [a,b] wynosi $c(b-a)$ niezalenie od wyboru punktów podziału i punktów pośrednich.

Definicja. Funkcję $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nazywamy funkcją całkowalną w sensie Riemanna, co oznaczamy pisząc $f \in R[a, b]$, jeśli dla każdego normalnego ciągu podziałów $\mathcal{T}_n$ oraz układów punktów pośrednich Λ_n dla $\mathcal{T}_n$ istnieje granica skończona ciągu sum całkowych: $\lim S(f, \mathcal{T}_n, \Lambda_n)$. Wówczas, jak można wykazać granice te są jednakowe dla wszystkich ciągów normalnych podziałów. Tę wspólną granicę oznaczamy symbolem $\int_a^b f(t)\,dt$ i nazywamy calką oznaczoną z funkcji f od a do b (lub całką po przedziale $[a, b]$).

UWAGA: W odróżnieniu od całki nieoznaczonej, zmienna t w zapisie $\int_a^b f(t)\,dt$ jest zmienną "pozorną", czyli "związaną" -wartość całki jest liczbą i nie zależy od t. Zamiast t możemy zresztą wpisać inną zmienną, co nie zmieni wartości całki, np. $\int_a^b x\,dx = \int_a^b t\,dt = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$. Całka ta jest "całką po odcinku skierowanym", istotna jest kolejność: punkt a jest początkiem, zaś punkt b -końcem. Definiuje się nawet $\int_a^b f(t)\,dt$ w przypadku, gdy $b < a$ wzorem $\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a dt$. Ponadto przyjmujemy, że $\int_a^a f(t)\,dt = 0$. Zapis$\int_{[a,b]} f(t)\,dt$ będzie zarezerwowany dla ogólniejszego pojęcia całki Lebesgue'a.