

Egzamin z analizy -teoria It. 6.02.2015 rozwiązania przykładowe

Proszę uzupełnić (na tej kartce, w razie potrzeby kontynuując na odwrocie) definicje i wypowiedzi twierdzeń.

1. Przypuśćmy, że mamy ciąg malejący o wyrazach $x_n \in \mathbb{R}$, przy czym $\lim x_n \neq -\infty$. Czy musi on wówczas być zbieżny, a jeśli tak, to jaka liczba jest jego granicą?

Ciąg jest ograniczony z dołu (zawsze, nawet dla granic niewłaściwych jest $\lim x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$), o ile ciąg jest nierosnący, otrzymujemy więc z założeń relację $\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \neq -\infty$). Granicą jest więc kres dolny zbioru wyrazów naszego ciągu.

2. Definicja mówi, że liczba g jest granicą funkcji $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ w punkcie x_0 , (będącym punktem skupienia zbioru D), jeżeli

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D (0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - g| < \epsilon$$

3. Sformułować twierdzenie o pochodnej złożenia $g \circ f$ funkcji $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$, $g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ w punkcie $x_0 \in (a, b)$.

Założenia: Przypuśćmy, że funkcja f jest różniczkowalna (czyli ma pochodną) w punkcie x_0 , zaś funkcja g jest różniczkowalna w punkcie $f(x_0)$

Teza: Wówczas funkcja złożona $g \circ f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ (określona wzorem: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$) jest różniczkowalna w punkcie x_0 , przy czym

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

4. Zapisać równanie prostej stycznej do wykresu funkcji różniczkowalnej $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ w punkcie $c \in (a, b)$

Z interpretacji geometrycznej wiemy, że współczynnik kierunkowy (czyli tangens kąta nachylenia) prostej stycznej do wykresu f w punkcie $P_0(c, f(c))$ jest równy pochodnej naszej funkcji w punkcie c . Stąd (dla pewnej stałej $B \in \mathbb{R}$ równanie tej prostej ma postać $y = f'(c)x + B$. Prosta ta musi przechodzić przez punkt P_0 , więc $f(c) = f'(c)c + B$, stąd $B = f(c) - f'(c)c$. Ostatecznie więc równanie prostej stycznej w postaci:

$$y = f'(c) \cdot (x - c) + f(c).$$

5. Napisać definicje funkcji pierwotnej oraz sformułować wzór na całkowanie przez części.

Funkcja F jest pierwotną dla funkcji f , jeśli jej pochodna spełnia równość $F' = f$. Gdy f, g są różniczkowalne, a ich pochodne są ciągłe, to

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

6. Z jakiego twierdzenia (lub własności) wynika, że każdy wielomian $W(x)$ stopnia nieparzystego ($n = 2k + 1$ i możemy założyć, że $W(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$) ma przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty?

Ponieważ w naszej sytuacji jest $\lim_{x \rightarrow -\infty} W(x) = -\infty$ oraz $\lim_{x \rightarrow +\infty} W(x) = +\infty$, wielomian W przyjmuje jakąś wartość ujemną, zaś w innym punkcie - pewną wartość dodatnią. Wielomiany są ciągłe, więc zerowanie się W wynika z twierdzenia Bolzano - Darboux. Innym powodem jest fakt, że gdy $z_0 = \alpha + i\beta$ jest zespolonym pierwiastkiem W - wielomianu o współczynnikach rzeczywistych, przy czym część urojona liczby z_0 , czyli β jest różna od zera, to również liczba sprzężona, $\bar{z}_0 = \alpha - i\beta$ jest pierwiastkiem W , różnym od z_0 . Tak więc każdy pierwiastek nierzeczywisty występuje w parze ze swym sprzężeniem. Z Zasadniczego Twierdzenia Algebry wiemy, że ilość wszystkich pierwiastków zespolonych z uwzględnieniem krotności - jest stopniem tego wielomianu. Gdyby nie było tu żadnych pierwiastków równych swojemu sprzężeniu, czyli rzeczywistych, to ich liczba była by parzysta. Parzysty musi być wtedy również stopień W .