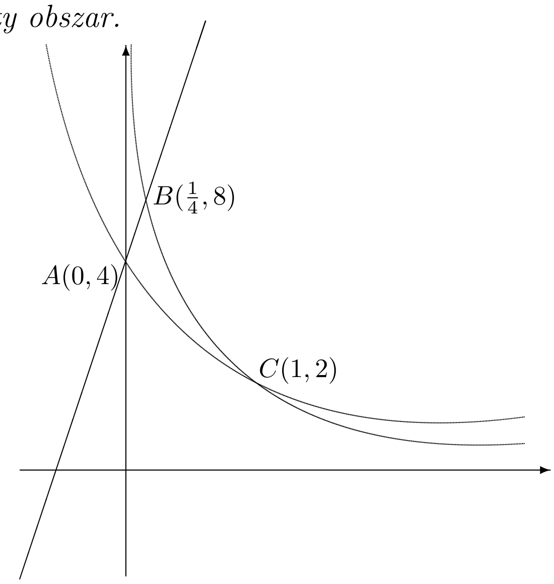
WSKAZÓWKI DO ROZWIĄZAŃ

1. Obliczyć pole figury płaskiej ograniczonej wykresami funkcji:

$$y_1 = 16x + 4; \qquad y_2 = \frac{2}{x}; \qquad y_3 = \frac{4}{x+1}.$$

Po pierwsze należy wyznaczyć punkty przecięcia wykresów. Przy czym y_1 z y_2 ma jeden punkt przecięcia, pozostałe pary mają dwa punkty przecięcia. Należy wybrać te, które tworzą zamknięty obszar.



Pole figury należy wyrazić jako sumę dwóch całek. Pierwszy obszar "między" punktami A i B, drugi "między" B i C.

2. Zbadać zbieżność:

a) całki

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx;$$

b) szeregu

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!(3n)!}{(5n)!}.$$

Ad-a)

Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$ *z podstawieniem* $t = \arcsin x$.

Niewłaściwą granicę całkowania zamienić na granicę całek. Następnie wykorzystując wzór na całkę oznaczoną z policzoną już pierwotną funkcji, obliczyć wartość granicy.

W zależności od wyniku ***skomentować*** *czy całka jest zbieżna czy rozbieżna.*

Ad-b)

Skorzystać z kryterium d'Alamberta.

$(2(n+1))! = (2n+2)! = (2n+2)(2n+1)(2n)!$

$(3(n+1))! = (3n+3)! = (3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!$

$(5(n+1))! = (5n+5)! = (5n+5)(5n+4)(5n+3)(5n+2)(5n+1)(5n)!$

Porównać wynik otrzymanej granicy z liczbą 1 i ***skomentować*** *czy szereg jest zbieżny czy rozbieżny.*

3. Czy w pukncie $(0,1)$ podana funkcja jest różniczkowalna:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{7x^2(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2} & (x,y) \neq (0,1) \\ 0 & (x,y) = (0,1). \end{cases}$$

Skomentować ciągłość funkcji w punkcie (0,1).
Obliczyć pochodne czątkowe funkcji w punkcie (0,1) - uwaga można je policzyć tylko ***z definicji!!***
Zapisać odpowiednią granicę i sprawdzić czy jest ona równa 0 - wynik należy uzasadnić (np. korzystając ze współrzędnych biegunowych).
Granica równa 0 uprawnia do skomentowania, że podana funkcja jest różniczkowalna w punkcie (0,1).

4. W jakim kierunku pochodna funkcji

$$f(x,y) = \ln(2x^2 + 3y^2)$$

w punkcie $A(0,2)$ przyjmuje największą wartość? Wyznaczyć tę wartość.

Pochodna kierunkowa pryjmuje największą wartość w kierunku zadanym przez gradient.
Obliczyć gradient funkcji w punkcie A(0,2).
Dzięki różniczkowalności podanej funkcji w punkcie A(0,2) można liczyć pochodną kierunkową ze wzoru $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \nabla f \circ \vec{v}$, *gdzie* $\vec{v}$ *jest wersorem (czyli* $||\vec{v}|| = 1$*) a* ∇f *gradientem funkcji.*
Zauważyć, że $||\nabla f|| = 1$ *i policzyć* $\max \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \nabla f \circ \nabla f$.

5. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji

$$f(x,y) = x - y + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Obliczyć pochodne cząstkowe - uwaga na pochodną funkcji wewnętrznej!.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot (-\frac{y}{x^2}) = 1 - \frac{y}{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -1 + \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot (\frac{1}{x}) = -1 - \frac{x}{x^2+y^2}$$

Skorzystać z warunku koniecznego i wyliczyć punkty stacjonarne (czyli te podejrzane o ekstremum) - uwaga na dziedzinę funkcji! (punkt (0,0) nie należy do dziedziny).
Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu.
Zapisać odpowiednie macierze dla punktów stacjonarnych i określić znaki minorów.
Skomentować istnienie i ewentualnie rodzaj ekstremum.