

Egzamin z analizy -część I- przykładowe odpowiedzi (do punktów z danym numerem)

1. S_n jest sumą iloczynów skalarnych wartości wektorów pola $\vec{F}$ w punktach $\gamma(\lambda_j)$ przez wektory "przyrostu krzywej", czyli wektorów cięciw: $\delta_j(\gamma) := \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})$. Dokładniej,

$$S_n = \sum_{j=1}^n \vec{F}(\gamma(\lambda_j)) \cdot [\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})] = \sum_{j=1}^n P(\gamma(\lambda_j))(x(t_j) - x(t_{j-1})) + Q(\gamma(\lambda_j))(y(t_j) - y(t_{j-1})).$$

Po zmianie orientacji całka zmieni znak: $J = -I$, gdyż w sumie typu S_n z tymi samymi punktami t_j, λ_j poza kolejnością składników (która nie wpływa na wynik sumowania), zmieniają się wektory "przyrostu krzywej" -na przeciwnie.

2. Ponieważ zapis $f \in C(a, b]$ oznacza, że dziedziną f jest przedział lewostronnie otwarty $(a, b]$, punkt a jest niewłaściwy,

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{\alpha \rightarrow a^+} \int_{\alpha}^b f(t) dt.$$

3. W szeregu Fouriera $S[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ (bo $T = 2\pi$), dla $x = 0$ mamy $\sin n0 = \sin 0 = 0$, $\cos n0 = 1$,

$$\text{więc} \quad S[f](0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Ponieważ zakładamy, że f jest przedziałami monotoniczna, z twierdzenia Dirichleta, $S[f](x) = \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$ (średnia arytmetyczna granic lewo- i prawostronnych w punkcie x , taką wartość musimy przyjąć jako $f(0)$, czyli w przypadku, gdy f jest nieciągła, aby $f(0) = S[f](0)$, potrzeba i wystarcza, by wartość $f(0)$ "leżała pośrodku skoku", czyli była wspomnianą średnią arytmetyczną granic 1-str. w zerze.

4. z definicji (bo ϕ jest złożeniem), z funkcją wewnętrzną $x \mapsto (x, h(x))$, można rozpisać $\phi'(x_0)$ jako granicę ilorazów różnicowych $\frac{1}{k}\{f(x_0+k), h(x_0+k) - f(x_0), h(x_0)\}$, ale chodziło o wzór (nikt go nie zapisał!): -oznaczymy $P_0 = (x_0, h(x_0))$

$$\phi'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, h(x_0)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, h(x_0)) \frac{dh}{dx}(x_0) \quad \text{czyli} \quad f'_x(P_0) + f'_y(P_0)h'(x_0).$$

Różniczka zupełna $d_b F$ (można ją zapisać też jako $Pdx + Qdy$, ale tu nie warto!, daje najprostszy zapis różniczki złożenia: to złożenie różniczek, tylko trzeba uważać, w jakich punktach je liczymy:

$$d_a(F \circ G) = d_{G(a)}F \circ d_aG \quad \text{czyli} \quad d_bF \circ d_aG \quad \text{dla} \quad b = G(a).$$

Różniczki (zupełne), to odwzorowania liniowe, ich złożeniu odpowiada mnożenie macierzy, a odpowiednie macierze, to macierze Jacobiego (pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu).

5. Zbieżność jednostajna f_n do f na zbiorze $[a, b]$ oznacza, że $\|f_n - f\|_{[a, b]} := \sup\{|f_n(t) - f(t)| : t \in [a, b]\}$ zmierza do zera, czyli

$$\forall \epsilon > 0 \exists M \forall n > M \forall x \in [a, b] |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

UWAGI: Ten warunek implikuje, że dla każdego $t \in [a, b]$ jest $f_n(t) \rightarrow f(t)$, ale implikacja odwrotna nie zachodzi: zbieżność w każdym punkcie nie implikuje zb. jednostajnej! Podobnie, zbieżność jednostajna nie implikuje zbieżności ciągu pochodnych! (jedynie implikuje zbieżność całek).

6. Nie podałem nazwy pola wektorowego, niech to będzie np. $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ - rozkład względem wersorów osi układu w $\mathbb{R}^3$. Wówczas dywergencja $\vec{F}$ dana jest wzorem $\text{div} \vec{F} = P'_x + Q'_y + R'_z$, co można też symbolicznie zapisać jako iloczyn skalarny $\nabla \cdot \vec{F}$, gdzie $\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$ jest operatorem różniczkowym. Najważniejsze, by opisać, po czym całkujemy, gdyż powierzchnia $\partial\Omega$ -czyli brzeg obszaru Ω powinna mieć taką orientację, by wersor normalny $\vec{n}$ był skierowany na zewnątrz. Ponadto pole wektorowe powinno być klasy C^1 na domknięciu $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Wówczas wzór Gaussa -Ostrogradskiego można zapisać tak:

$$\int \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int \int \int_{\Omega} \text{div} \vec{F} dV$$

albo

$$\int \int_{\partial\Omega} P dydz + Q dzdx + R dx dy = \int \int \int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz.$$