

# Pochodne cząstkowe, pochodne kierunkowe, różniczkowalność funkcji wielu zmiennych

Elektrotechnika - Analiza matematyczna II

17 maja 2022

**Zadanie 1** — Zbadać ciągłość następujących funkcji

$$\text{a) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

$$\text{b) } g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ 1 & \text{dla } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

$$\text{c) } h(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^4 + y^4} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

$$\text{d) } k(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ \pi & \text{dla } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

**Zadanie 2** — Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu następujących funkcji w podanych punktach

$$\text{a) } f(x, y) = x + y - \sqrt{x^2 + y^2} \text{ w punkcie } (3, 4),$$

$$\text{b) } g(x, y) = \ln \left( x + \frac{y}{2x} \right) \text{ w punkcie } (1, 2),$$

$$\text{c) } h(x, y, z) = xy^2 + yz^2 + xz \text{ w punkcie } (1, -1, 1).$$

**Zadanie 3** — Znaleźć pochodne cząstkowe drugiego rzędu następujących funkcji

$$\text{a) } f(x, y) = x^2 y + \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\text{b) } g(x, y) = \arctan \frac{x + y}{1 - xy},$$

$$\text{c) } h(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xz}.$$

**Zadanie 4** — Obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji

$$\text{a) } f(x, y) = x^4 + y^4 + 2xy + 1, \quad \text{w punkcie } (1, 2) \text{ w kierunku wektora } v = (3, -1),$$

$$\text{b) } f(x, y) = \ln(x^2 + y^2), \quad \text{w punkcie } (1, 1) \text{ w kierunku wektora } v = (1, 1),$$

$$\text{c) } f(x, y, z) = x + y^2 + xyz^3, \quad \text{w punkcie } (1, 1, -1) \text{ w kierunku wektora } v = (2, 0, 1).$$

**Zadanie 5** — Wyznaczyć w kierunku jakiego wektora jednostkowego pochodna kierunkowa funkcji  $f(x, y) = 3x^2 - 6xy + y^2$  w punkcie  $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2})$  przyjmuje największą wartość.

**Zadanie 6** — Zbadać różniczkowalność następujących funkcji

a)  $f(x, y) = x^2 + y^4 - 3xy^2 + 5$ , w punkcie  $(1, 2)$ ,

b)  $f(x, y) = \begin{cases} 2x^2 + 3y + \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$

c)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  w punkcie  $(0, 0)$ ,

d)  $f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}$  w punkcie  $(0, 0)$ ,

e)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$

f)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$

g)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$