

Zadanie 1. Wyliczyć całki oznaczone:

$$(a) \int_1^e \ln x \, dx \quad (b) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x \cos x \, dx \quad (c) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$(d) \int_1^2 \frac{\exp(\frac{1}{x}) \, dx}{x^2} \quad (e) \int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{1 - \ln^2 x}} \quad (f) \int_0^\pi x^3 \sin x \, dx.$$

Zadanie 2. Pokazać, że jeżeli funkcja f jest nieparzysta, to jej całka po przedziale $[-a, a]$ jest równa 0.

Zadanie 3. Pokazać, że jeżeli funkcja f jest parzysta, to jej całka po przedziale $[-a, a]$ jest równa $2 \int_0^a f(t) \, dt$.

Zadanie 4. Wyliczyć $\int_{-a}^a g(t) \, dt$ w przypadku, gdy

$$(i) \, a = \frac{1}{2}, g(t) = \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad (ii) \, a = 1, g(x) = \frac{x^7 - 3x^5 + 7x}{\cos x}, \quad (iii) \, a = \frac{\pi}{3}, g(s) = s^{10} \sin^9 s.$$

Zadanie 5. Zakładając ciągłość funkcji f na przedziale $[0, 1]$ pokazać, że

$$\int_0^\pi x f(\sin x) \, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) \, dx.$$

(wskazówka: zastosować podstawienie $t = \pi - x$)

Zadanie 6. Znaleźć $\int_0^\pi$ dla funkcji: $x \sin^3 x \cos x$.

Uwaga: dla całki $\int_0^\pi \frac{x \cos x}{1 + \sin^2 x} \, dx$ zastosowanie tezy z zadania 5 powinno dać wartość zero. Ale tak nie jest! całka jest ujemna (trudna do wyliczenia), metody numeryczne dają wartość mniejszą, niż -1,6. Z jakiego powodu nie można jednak stosować wzoru z zadania 5? (tu $f(t) = \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t^2}$ dla $t > 0$ oraz $-\frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t^2}$ dla $t < 0$.)

Zadanie 7. Wyliczyć $\int_{-1}^3 \operatorname{sgn}(x - x^3) \, dx$, $\int_0^2 |1 - x| \, dx$, $\int_{\frac{1}{2}}^e |\ln x| \, dx$ oraz całkę $\int_0^2$ z funkcji równej x^2 w przedziale $[0, 1]$ oraz równej $2 - x$ dla $1 < x \leq 2$.