

Szeregi liczbowe

Elektrotechnika - Analiza matematyczna II

15 kwietnia 2020

Twierdzenie 1 (Warunek konieczny zbieżności szeregu). *Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.*

Zadanie 1 — Posługując się warunkiem koniecznym zbieżności szeregu, pokazać, że następujące szeregi są rozbieżne:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n \cdot n}, & \text{z c) } \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\sin \frac{1}{n}\right), \\ \text{z b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}, & \text{z d) } \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1} \right). \end{array}$$

Rozwiązanie (Zadanie 1) — a) Warunek konieczny zbieżności szeregu nie gwarantuje zbieżności szeregu (np. szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ spełnia warunek konieczny, ale nie jest zbieżny), ale w przypadku, gdy warunek konieczny nie jest spełniony to szereg nie może być zbieżny. Wynika to z następującej tautologii, zwanej zasadą kontrapozycji

$$p \implies q \iff (\sim q \implies \sim p),$$

gdzie p i q są dowolnymi zdaniami. Zatem jeśli pokażemy, że granica ciągu (a_n) nie istnieje lub jest różna od zera, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny. W pierwszym przykładzie granica nie istnieje, gdyż rozpatrując dwa podciągi, jeden o wyrazach parzystych, a drugi nieparzystych otrzymamy dwie różne granice. ■

Twierdzenie 2 (Kryterium d'Alemberta). *Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*

$$\text{a) jest zbieżny, jeśli } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1,$$

$$\text{b) jest rozbieżny, jeśli } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1.$$

Kryterium d'Alemberta nie rozstrzyga zbieżności, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$.

Zadanie 2 — Korzystając z kryterium d'Alemberta zbadać zbieżność następujących szeregów:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n + 5^n}, & \text{z d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \\ \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 e^n}, & \text{z e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \\ \text{z c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n^n}, & \text{z f) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}. \end{array}$$

Rozwiązanie (Zadanie 2) — a) Liczymy granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^5 \frac{2^n + 5^n}{2^{n+1} + 5^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^5 \frac{5^n \cdot \left(\left(\frac{2}{5} \right)^n + 1 \right)}{5^n \cdot \left(2 \cdot \left(\frac{2}{5} \right)^n + 5 \right)} = \frac{1}{5} < 1.$$

Zatem, z kryterium d'Alemberta, szereg jest zbieżny.

b) Liczymy granicę

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2(n+1))!}{(2n)!} \frac{(n!)^2 e^n}{((n+1)!)^2 e^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n)!} \frac{(n!)^2}{(n+1)^2 (n!)^2} \frac{1}{e} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \frac{1}{e} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(2 + \frac{2}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2} \frac{1}{e} = \frac{4}{e} > 1. \end{aligned}$$

Zatem, z kryterium d'Alemberta, szereg jest rozbieżny. ■

Twierdzenie 3 (Kryterium Cauchy'ego). Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

a) jest zbieżny, jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$,

b) jest rozbieżny, jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$.

Kryterium Cauchy'ego nie rozstrzyga zbieżności, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$.

Zadanie 3 — Korzystając z kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność następujących szeregów:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(2n + \frac{1}{n}\right)^n}, & \text{z d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}, \\ \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}}{3^n}, & \text{z e) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n, \\ \text{z c) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctan(n^2+1)\right)^n, & \text{z f) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} 2^n. \end{array}$$

Rozwiązanie (Zadanie 3) — a) Liczymy granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1+\frac{1}{n^2}}}{2n + \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n (\sqrt[n]{n})^2}{n \left(2 + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{2} < 1.$$

Zatem, z kryterium Cauchy'ego, szereg jest zbieżny.

b) Liczymy granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n}{3} = \frac{e^2}{3} > 1.$$

Zatem, z kryterium Cauchy'ego, szereg jest rozbieżny. ■

Twierdzenie 4 (Kryterium porównawcze). a) Jeśli $|a_n| \leq c_n$ dla $n \geq N_0$, gdzie N_0 jest pewną ustaloną liczbą całkowitą, i jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ jest zbieżny, to i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

b) Jeśli $a_n \geq d_n \geq 0$ dla $n \geq N_0$ i jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ jest rozbieżny, to i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Często wygodne okazuje się następujące kryterium.

Twierdzenie 5 (Kryterium ilorazowe). Jeśli dla $n \geq N_0$ wyrazy szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są dodatnie oraz istnieje dodatnia właściwa granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0, \infty)$, to szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są jednocześnie zbieżne lub rozbieżne.

Stosując kryterium porównawcze lub ilorazowe, często będziemy korzystać z następującego twierdzenia.

Twierdzenie 6. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ jest zbieżny, jeśli $\alpha > 1$, rozbieżny, jeśli $\alpha \leq 1$.

Zadanie 4 — Stosując kryterium porównawcze zbadać zbieżność następujących szeregów liczbowych:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n\sqrt{n+1}}}, & \text{z f)} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\ln \frac{n^3+1}{n^3}}, \\ \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\frac{1}{n}}, & \text{z g)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n}, \\ \text{z c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), & \text{z h)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sqrt{\sin \frac{1}{n}}, \\ \text{z d)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}, & \text{z i)} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}, \\ \text{z e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right), & \text{z j)} \sum_{n=1}^{\infty} \tan^2 \frac{1}{n}. \end{array}$$

Rozwiązanie (Zadanie 4) — a) Wystarczy oszacować w następujący sposób

$$\frac{1}{\sqrt{n\sqrt{n+1}}} \geq \frac{1}{\sqrt{n\sqrt{n+n}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2n^{\frac{3}{2}}}}.$$

Wykorzystując twierdzenie 6. oraz kryterium porównawcze otrzymujemy, że szereg jest rozbieżny.

Można też było zastosować kryterium ilorazowe i porównać wyjściowy szereg z szeregiem $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}$.

b) Zauważmy, że możemy oszacować w następujący sposób

$$\frac{1}{n} e^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{ne^{\frac{1}{n}}} \geq \frac{1}{ne}.$$

Powyższe szacowanie jest prawdziwe, gdyż dla $n \in \mathbb{N}$ funkcja $e^{\frac{1}{n}}$ przyjmuje największą wartość, gdy $n = 1$. Zatem, z kryterium porównawczego, szereg jest rozbieżny. ■

d) Wykorzystać oszacowanie $\ln x \leq x - 1$ dla $x \geq 1$.

h) Wykorzystać oszacowanie $\sin x \leq x$ dla $x \geq 0$.

i) Wykorzystać oszacowanie $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ dla $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

j) Wykorzystać oszacowanie $\tan x \leq \frac{4}{\pi}x$ dla $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Twierdzenie 7 (Kryterium całkowe). Niech $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją dodatnią i malejącą.

Niech ponadto $a_n = f(n)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wówczas szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy,

gdy zbieżna jest całka niewłaściwa $\int_1^{\infty} f(x)dx$.

Zadanie 5 — Stosując kryterium całkowe zbadać zbieżność szeregów:

$$\text{a)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}, \quad \text{z b)} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)},$$

Rozwiązanie (Zadanie 5) — a) Aby sprawdzić zbieżność tego szeregu sprawdzamy, czy zbieżna jest odpowiadająca mu całka niewłaściwa

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{t} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{\ln 2}^{\beta} \frac{dt}{t} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \ln |t| \Big|_{\ln 2}^{\beta} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \ln \beta - \ln(\ln 2) = \infty.$$

Zatem, z kryterium całkowego, szereg jest rozbieżny. ■

Twierdzenie 8 (Kryterium Leibniza). *Jeżeli ciąg liczbowy (a_n) o wyrazach nieujemnych spełnia następujące warunki*

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$

b) *ciąg (a_n) jest nierosnący,*

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ jest zbieżny.

Zadanie 6 — Korzystając z kryterium Leibniza zbadać zbieżność następujących szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}},$

z d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2},$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n+1}{4n+1} \right)^n,$

z e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1},$

z c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n},$

z f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$

Rozwiązanie (Zadanie 6) — a) Sprawdzamy, czy ciąg zbiega do zera

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0.$$

Sprawdzamy, czy ciąg jest nierosnący

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt[3]{\frac{n}{n+1}} = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n+1}} \leq 1.$$

Zatem, z kryterium Leibniza, szereg jest zbieżny

b) Sprawdzamy, czy ciąg jest zbieżny do zera

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{4n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3 + \frac{1}{n}}{4 + \frac{1}{n}} \right)^n = 0.$$

Łatwo zauważyć, że

$$a_{n+1} = \left(\frac{3n+4}{4n+5} \right)^{n+1} = \left(\frac{3n+4}{4n+5} \right)^n \underbrace{\left(\frac{3n+4}{4n+5} \right)}_{\leq 1} \leq \left(\frac{3n+4}{4n+5} \right)^n.$$

Zatem wystarczy pokazać, że

$$\left(\frac{3n+4}{4n+5} \right)^n \leq a_n = \left(\frac{3n+1}{4n+1} \right)^n.$$

Ze względu na monotoniczność funkcji wykładniczej, powyższy warunek jest równoważny

$$\frac{3n+4}{4n+5} \leq \frac{3n+1}{4n+1}.$$

Stąd

$$(3n+4)(4n+1) \leq (3n+1)(4n+5).$$

$$12n^2 + 19n + 4 \leq 12n^2 + 19n + 5.$$

$$0 \leq 1.$$

Zatem, dla każdego $n \in \mathbb{N}$, zachodzi $a_{n+1} \leq a_n$. Z kryterium Leibniza szereg jest zbieżny. ■