

Szereg Fouriera

Elektrotechnika - Analiza matematyczna II

28 kwietnia 2020

Definicja 1. Niech dana będzie funkcja okresowa $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o okresie 2π , bezwzględnie całkowalna w przedziale $[-\pi, \pi]$. Trygonometrycznym szeregiem Fouriera funkcji f nazywamy szereg funkcyjny

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

o współczynnikach określonych następującymi wzorami:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Definicja 2 (Warunki Dirichleta). Funkcja f spełnia warunki Dirichleta w przedziale $[-\pi, \pi]$, jeśli jest przedziałami monotoniczna oraz w punktach skokowej nieciągłości wartość f jest średnią arytmetyczną granic lewo- i prawostronnych w tym punkcie. Dodatkowo - na końcach przedziału powinno być

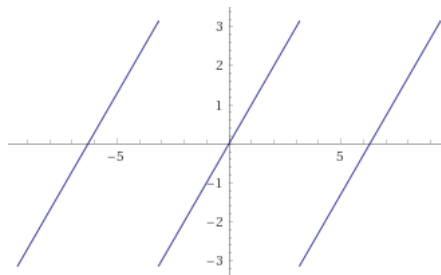
$$f(-\pi) = f(\pi) = \frac{1}{2} \left(\lim_{t \rightarrow -\pi^+} f(t) + \lim_{t \rightarrow \pi^-} f(t) \right).$$

Twierdzenie 3. Funkcje spełniające warunki Dirichleta są w każdym punkcie równe sumom swoich szeregów Fouriera.

Zadanie 1 — Rozwinąć następujące funkcje w szereg Fouriera:

a) $f(x) = x$, dla $x \in (-\pi, \pi]$, b) $f(x) = x^2$, dla $x \in (-\pi, \pi]$,

Rozwiązanie (Zadanie 1) — Poniższy wykres ilustruje funkcję f .



Rysunek 1: Wykres funkcji f

Funkcja f jest nieparzysta, zatem $a_n = 0$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$. Wynika to z tego, że gdy f jest nieparzysta, to dla współczynników a_n funkcje podcałkowe są również nieparzyste (iloczyn funkcji nieparzystej i parzystej jest funkcją nieparzystą), a całkujemy po symetrycznych względem zera przedziałach. Zatem pozostaje obliczyć wartości współczynników b_n . Zauważmy, że gdy f jest nieparzysta to funkcje podcałkowe dla współczynników b_n są parzyste (iloczyn funkcji nieparzystej i nieparzystej jest funkcją parzystą).

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx = \left[\begin{array}{ll} u = x & v' = \sin(nx) \\ u' = 1 & v = -\frac{1}{n} \cos(nx) \end{array} \right] = -\frac{2x}{\pi n} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} + \\ &+ \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx = -\frac{2}{n} \cos(n\pi) + \frac{2}{\pi n^2} \sin(nx) \Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{n} \cos(n\pi) + \frac{2}{\pi n^2} \sin(n\pi) = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

W powyższych obliczeniach skorzystaliśmy na koniec ze wzorów

$$\sin(n\pi) = 0 \quad \text{oraz} \quad \cos(n\pi) = (-1)^n \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Szereg Fouriera dla funkcji f jest postaci

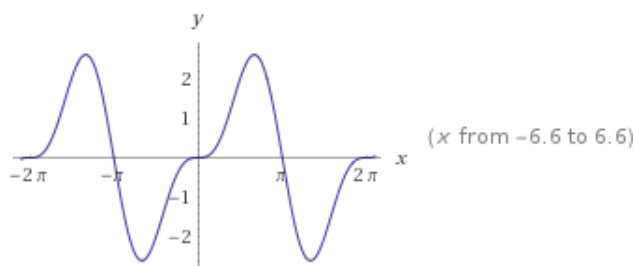
$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2 \sin(nx)}{n}.$$

Funkcja f spełnia warunki Dirichleta z wyjątkiem końców przedziału, zatem

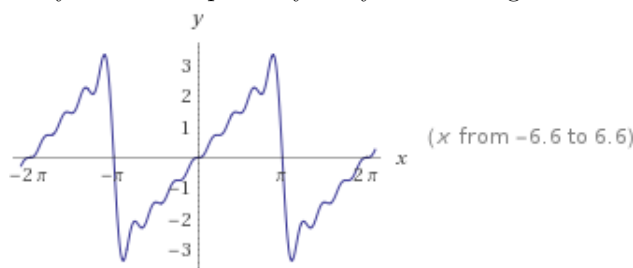
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2 \sin(nx)}{n} \quad \text{dla} \quad x \in (-\pi, \pi).$$

Na końcach przedziałów szereg Fouriera przyjmuje wartość zero, gdyż jest to średnia arytmetyczna wartości funkcji f w tych punktach.

Zobaczmy jeszcze jak dokładnie szereg Fouriera przybliża funkcję f . ■



Rysunek 2: Wykres dwóch pierwszych wyrazów szeregu Fouriera funkcji f

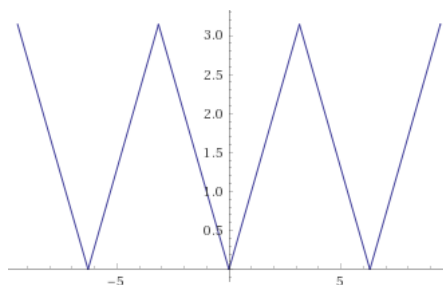


Rysunek 3: Wykres ośmiu pierwszych wyrazów szeregu Fouriera funkcji f

Zadanie 2 — Rozwinąć następujące funkcje w szereg Fouriera:

$$\text{a) } f(x) = |x|, \quad \text{dla } x \in (-\pi, \pi], \quad \text{b) } f(x) = \pi - |x|, \quad \text{dla } x \in (-\pi, \pi],$$

Rozwiązanie (Zadanie 2) — Poniższy wykres ilustruje funkcję f .



Rysunek 4: Wykres funkcji f

Funkcja f jest parzysta, zatem $b_n = 0$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$. Obliczamy wartości współczynników a_n .

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} x^2 \Big|_0^{\pi} = \pi.$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx = \left[\begin{array}{ll} u = x & v' = \cos(nx) \\ u' = 1 & v = \frac{1}{n} \sin(nx) \end{array} \right] = \\
 &= \frac{2}{\pi n} x \sin(nx) \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi n^2} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1).
 \end{aligned}$$

Szereg Fouriera dla funkcji f jest postaci

$$S(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^n - 1) \frac{2 \cos(nx)}{\pi n^2}.$$

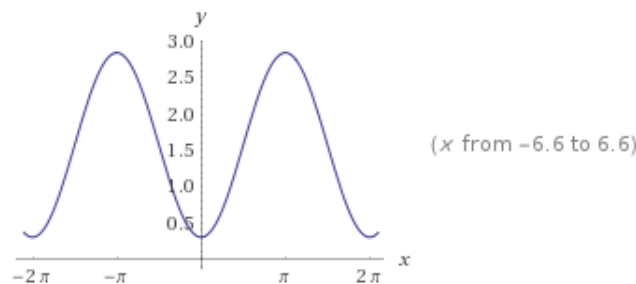
Zauważmy, że parzyste wyrazy powyższego szeregu są równe zero, więc

$$S(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4 \cos((2k+1)x)}{\pi (2k+1)^2}.$$

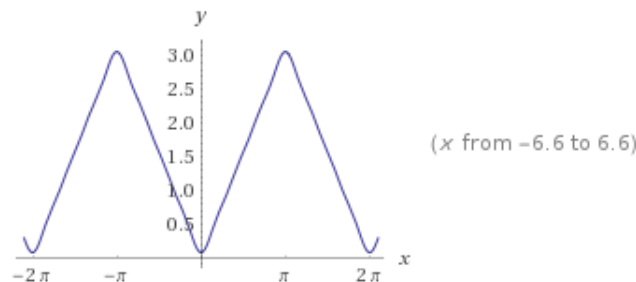
Funkcja f spełnia warunki Dirichleta w każdy punkcie, zatem

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4 \cos((2k+1)x)}{\pi (2k+1)^2} \quad \text{dla } x \in [-\pi, \pi].$$

Zobaczmy jeszcze jak dokładnie szereg Fouriera przybliża funkcję f . ■



Rysunek 5: Wykres dwóch pierwszych wyrazów szeregu Fouriera funkcji f

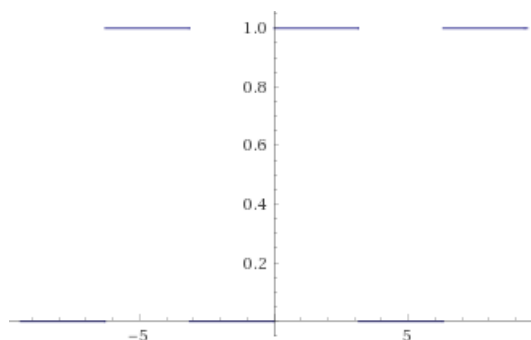


Rysunek 6: Wykres ośmiu pierwszych wyrazów szeregu Fouriera funkcji f

Zadanie 3 — Rozwinąć następujące funkcje w szereg Fouriera:

- a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in [0, \pi], \\ 0 & \text{dla } x \in (-\pi, 0). \end{cases}$
- z b) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in [0, \pi], \\ 0 & \text{dla } x \in (-\pi, 0). \end{cases}$
- z c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} x^2 & \text{dla } x \in [0, \pi], \\ -x & \text{dla } x \in (-\pi, 0). \end{cases}$

Rozwiązanie (Zadanie 3) — Poniższy wykres ilustruje funkcję f .



Rysunek 7: Wykres funkcji f

Funkcja f nie jest ani parzysta, ani nieparzysta. Obliczamy wartości współczynników a_n oraz b_n .

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx = 1.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi n} \sin(nx) \Big|_0^{\pi} = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx = -\frac{1}{\pi n} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} = (1 - (-1)^n) \frac{1}{\pi n}.$$

Szereg Fouriera dla funkcji f jest postaci

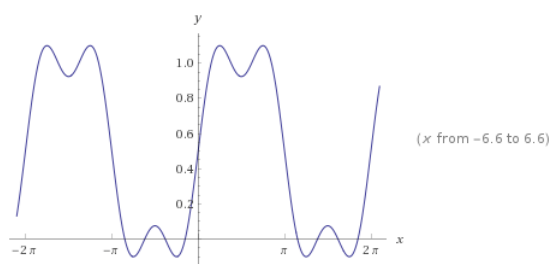
$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (1 - (-1)^n) \frac{\sin(nx)}{\pi n}.$$

Zauważmy, że parzyste wyrazy powyższego szeregu są równe zero, więc

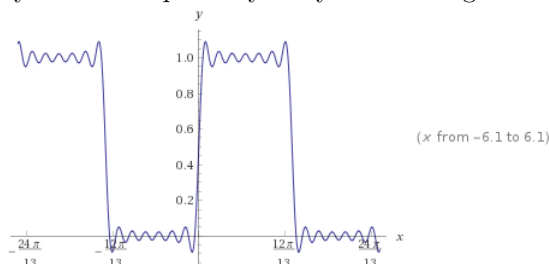
$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 \sin((2k+1)x)}{\pi(2k+1)}.$$

Funkcja f spełnia warunki Dirichleta, więc $f(x) = S(x)$ dla wszystkich punktów nie będących punktami nieciągłości.

Zobaczmy jeszcze jak dokładnie szereg Fouriera przybliża funkcję f . ■



Rysunek 8: Wykres trzech pierwszych wyrazów szeregu Fouriera funkcji f



Rysunek 9: Wykres sześciu pierwszych wyrazów szeregu Fouriera funkcji f

Zadanie 4 — Rozwinąć funkcję $f(x) = \cos x$, gdzie $x \in (0, \pi)$, w szereg *sinusów*.

Rozwiązanie (Zadanie 4) — Mogłoby się wydawać, że zadanie jest niewykonalne, gdyż *kosinus* jest funkcją parzystą, a szereg sinusów, to funkcja nieparzysta. Jednakże, aby mówić o parzystości lub nieparzystości, to dana funkcja musi być określona symetrycznie względem zera, a w naszym zadaniu *kosinus* jest określony tylko na prawo od zera. Zatem, możemy dookreślić funkcję f tak, aby była nieparzysta.

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} \cos x & \text{dla } x \in (0, \pi], \\ 0 & \text{dla } x \in \{-\pi, 0, \pi\}, \\ -\cos x & \text{dla } x \in [-\pi, 0). \end{cases}$$

Powyższa funkcja $\hat{f}$ jest nieparzysta, zatem wartości współczynników $a_n = 0$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$. Obliczamy wartości współczynników b_n .

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos x \sin(nx) dx.$$

Wyznamy pomocniczo całkę nieoznaczoną.

$$\begin{aligned} \int \cos x \sin(nx) dx &= \left[\begin{array}{ll} u = \cos x & v' = \sin(nx) \\ u' = -\sin x & v = -\frac{1}{n} \cos(nx) \end{array} \right] = -\frac{1}{n} \cos x \cos(nx) - \frac{1}{n} \int \sin x \cos(nx) dx \\ &= \left[\begin{array}{ll} u = \sin x & v' = \cos(nx) \\ u' = \cos x & v = \frac{1}{n} \sin(nx) \end{array} \right] = -\frac{1}{n} \cos x \cos(nx) - \frac{1}{n} \sin x \sin(nx) + \frac{1}{n^2} \int \cos x \sin(nx) dx. \end{aligned}$$

Przenosząc na drugą stronę i dzieląc przez stałe otrzymujemy, że

$$\int \cos x \sin(nx) dx = \frac{1}{1-n^2} (\sin x \sin(nx) + \cos x \cos(nx)) + C.$$

Wracamy do wyznaczania wartości współczynników b_n .

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos x \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi(1-n^2)} (\sin x \sin(nx) + \cos x \cos(nx)) \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi(1-n^2)} ((-1)^{n+1} - 1).$$

Szereg Fouriera dla funkcji $\hat{f}$ jest postaci

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - (-1)^n) \frac{2 \sin(nx)}{\pi(n^2 - 1)}.$$

Zauważmy, że parzyste wyrazy powyższego szeregu są równe zero, więc

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4 \sin(2k+1)x}{\pi((2k+1)^2 - 1)}.$$

Funkcja $\hat{f}$ spełnia warunki Dirichleta w każdym punkcie, zatem

$$\hat{f}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^2 - 1} \quad \text{dla } x \in (-\pi, \pi).$$

W szczególności

$$\cos x = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^2 - 1} \quad \text{dla } x \in (0, \pi).$$

Zadanie 5 — Rozwinąć funkcję $f(x) = \sin x$, gdzie $x \in (0, \pi]$, w szereg *kosinusów*.