

Całka niewłaściwa

Elektrotechnika - Analiza matematyczna II

8 marca 2022

Zadanie 1 — Obliczyć następujące całki niewłaściwe lub pokazać, że są one rozbieżne

a) $\int_0^{\infty} e^{-x} \sin x dx,$

d) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}},$

b) $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx,$

e) $\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx,$

c) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}},$

f) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$

Zadanie 2 — Obliczyć następujące całki niewłaściwe lub pokazać, że są one rozbieżne

a) $\int_0^1 x \ln x dx,$

d) $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x \ln^2 x},$

b) $\int_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx,$

e) $\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}},$

c) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}},$

f) $\int_0^1 \ln x dx.$

Zadanie 3 — Zbadać zbieżność następujących całek niewłaściwych

a) $\int_0^{\infty} \frac{x^{13}}{(x^5 + x^3 + 1)^3} dx,$

d) $\int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx,$

b) $\int_0^{\infty} \frac{x \arctan x}{\sqrt[3]{1+x^4}} dx,$

e) $\int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x \ln(\ln x)},$

c) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} dx,$

f) $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}} - 1}.$

Wskazówka (Zadanie 3) — a) Początkową całkę zapisać jako sumę dwóch całek. Wykorzystać nierówność $x^3 \leq x^5$ dla $x \geq 1$,

b) Początkową całkę zapisać jako sumę dwóch całek. Wykorzystać nierówność $\arctan x \geq \frac{\pi}{4}$ dla $x \geq 1$,

c) Wykorzystać nierówność $x^4 \leq x^2$ dla $x \in [0, 1]$,

d) Początkową całkę zapisać jako sumę dwóch całek. Wykorzystać nierówność $\sqrt{x} \leq x$ dla $x \geq 1$,

e) Wykorzystać nierówność $\ln x \leq x - 1$ dla $x \geq 1$,

f) Wykorzystać nierówność $e^x \geq x + 1$ dla $x \in \mathbb{R}$.