

Zastosowania geometryczne całki

Elektrotechnika - Analiza matematyczna II

15 marca 2022

Zadanie 1 — Obliczyć pola figur ograniczonych krzywymi o równaniach

- | | |
|---|--|
| a) $2y = x^2$ oraz $x^2 + y^2 = 8$, | d) $2y = x^2$ oraz $y = \frac{1}{1+x^2}$, |
| b) $y = 3x$, $y = x^2$ oraz $2y = x^2$, | e) $y = x^2 - 6x + 10$ oraz $y = 6x - x^2$, |
| c) $y = x^2$ oraz $y^2 = x$, | f) $y = \ln x$ oraz $y = \ln^2 x$. |

Zadanie 2 — Obliczyć pola figur ograniczonych krzywymi danymi parametrycznie

- a) $x = \cos^3 t$ oraz $y = \sin^3 t$, gdzie $t \in [0, 2\pi]$,
- b) $x = t^2 - 1$ oraz $y = t^3 - t$, gdzie $t \in \mathbb{R}$,
- c) $x = \cos t$ oraz $y = \sin t$, gdzie $t \in [0, 2\pi]$,
- d) $x = t - \sin t$ oraz $y = 1 - \cos t$, gdzie $t \in [0, 2\pi]$,
- e) $x = 3t^2$ oraz $y = 3t - t^3$, gdzie $t \in \mathbb{R}$.

Zadanie 3 — Obliczyć pola następujących figur ograniczonych krzywymi zadanymi we współrzędnych biegunowych

- a) $r = \sin 3\theta$, gdzie $\theta \in [0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{2\pi}{3}, \pi] \cup [\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$,
- b) $r = 1 + \cos \theta$, gdzie $\theta \in [0, 2\pi]$.
- c) $r = \sin \theta$, gdzie $\theta \in [0, \pi]$,
- d) $r = \theta$, gdzie $\theta \in [0, \pi]$ oraz prostą $x = 0$,
- e) $r^2 = 2 \cos \theta$, gdzie $\theta \in [0, 2\pi]$.

Zadanie 4 — Znaleźć długości następujących krzywych płaskich danych poniższymi funkcjami

- a) $f(x) = \ln x$, gdzie $x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}]$,
- b) $f(x) = \ln(1 - x^2)$, gdzie $x \in [0, \frac{1}{2}]$,
- c) $f(x) = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, gdzie $x \in [1, 2]$,
- d) $f(x) = \sqrt{x - x^2} + \arcsin \sqrt{x}$, gdzie $x \in [-1, 1]$,
- e) $f(x) = 1 - \ln(\cos x)$, gdzie $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Zadanie 5 — Obliczyć długość łuku następujących krzywych

- a) $x = t^2$, $y = t - \frac{1}{3}t^3$, w przedziale $t \in [0, \sqrt{3}]$,
- b) $x = 2t \cos t + (t^2 - 2) \sin t$, $y = 2t \sin t - (t^2 - 2) \cos t$, w przedziale $t \in [0, \pi]$,
- c) $x = \cos t + t \sin t$, $y = \sin t - t \cos t$, w przedziale $t \in [0, \pi]$.

Zadanie 6 — Obliczyć długość łuku następujących krzywych

- a) $r = e^\theta$, w przedziale $\theta \in [0, \pi]$,
- b) $r = 2 \cos \theta$, w przedziale $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$,
- c) $r = 1 + \cos \theta$, w przedziale $\theta \in [0, \pi]$.

Zadanie 7 — Obliczyć objętość oraz pole bryły powstałej poprzez obrót wokół osi Ox następujących funkcji

- a) $f(x) = \sqrt{x}$, gdzie $x \in [0, 6]$,
- b) $f(x) = 2x$, gdzie $x \in [0, 1]$.
- c) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, gdzie $x \in [-1, 1]$.