

Wstęp

Wiemy dobrze, co oznacza prostopadłość wektorów $\vec{u}, \vec{v}$ na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$. Ich iloczyn skalarny, $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ma wynosić zero i wówczas piszemy $\vec{u} \perp \vec{v}$, zaś długości takich wektorów, oznaczane szmolami: $\|\vec{u}\|, \|\vec{v}\|$ spełniają na mocy twierdzenia Pitagorasa relację

$$\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2. \quad (TP)$$

Jej algebraiczny dowód wynika z dwuliniowości iloczynu skalarnego oraz z relacji $\|\vec{w}\|^2 = \vec{w} \cdot \vec{w}$. Analogiczne związki zachodzą dla wektorów d -wymiarowej przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^d$. Gdy mamy układ wektorów kanonicznej bazy 0-1-kowej $\vec{e}_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, gdzie jedyną niezerową jest j -ta współrzędna, to dowolny wektor $\vec{w} = (w_1, \dots, w_d) \in \mathbb{R}^d$ ma jednoznaczny rozkład w postaci sumy

$$\vec{w} = w_1 \vec{e}_1 + \dots + w_d \vec{e}_d, \quad \text{gdzie} \quad w_j = \vec{w} \cdot \vec{e}_j, \quad \|\vec{w}\|^2 = \sum_{j=1}^d w_j^2. \quad (R)$$

Pewnym uogólnieniem może być przestrzeń ℓ^2 złożona z ciągów nieskończonych sumowalnych z kwadratem, tzn. spełniających warunek $\sum_{j=1}^{\infty} w_j^2 < +\infty$. Można uzyskać analogiczne do (R) rozwinięcie ortogonalne dowolnego wektora z tej przestrzeni względem kanonicznych wektorów bazowych $\vec{e}_j$ (ciągów mających same zera z wyjątkiem j -tego wyrazu równego 1). *Nota bene*, taki ciąg nie będzie już bazą wektorową w sensie znanym z algebry liniowej, czyli tzw. bazą Hamela, tam mogły występować jedynie sumy skończone. To rozwinięcie jest postaci „sumy nieskończonej”, czyli sumy szeregu

$$\vec{w} = \sum_{j=1}^{\infty} w_j \vec{e}_j, \quad \text{gdzie} \quad w_j = \vec{w} \cdot \vec{e}_j, \quad \|\vec{w}\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} w_j^2. \quad (RF)$$

W pewnych zbiorach funkcji możemy również określić strukturę przestrzeni wektorowej z iloczynem skalarnym i znaleźć odpowiedniki układu kanonicznych wektorów bazowych. Podstawowym warunkiem będzie wzajemna prostopadłość elementów takiego układu. (Będzie jeszcze drugi istotny warunek -tzw. zupełność układu, ale nawet bez niego pewne częściowe rezultaty, jak zbieżność odpowiedniego szeregu -będą osiągalne.)

Niestety, gdy naszymi wektorami staną się funkcje, nie będziemy mogli dalej używać symbolu kropki dla oznaczenia iloczynu skalarnego, bo dla funkcji u, v zmiennej t symbol $u \cdot v$ powinien być rozumiany jako iloczyn tych funkcji, czyli funkcja, której wartością w punkcie t jest $u(t)v(t)$. Na ogół t przebiega przedział $[-\pi, \pi]$. Dla oznaczenia iloczynu skalarnego funkcji u oraz v będę więc używał nawiasu graniastego: $\langle u, v \rangle$. W niektórych książkach używa się nawiasów okrągłych, (co zwykle oznacza jednak pary uporządkowane), lub symbolu $\langle u | v \rangle$. Zrezygnujemy też z umieszczania strzałek oznaczających wektory nad u, v -tym bardziej, że czasami będą rozważane funkcje o wartościach zespolonych, wówczas $\overline{v(t)}$ oznaczać będzie liczbę sprzężoną do $v(t)$. Będziemy rozważali jedynie funkcje całkowalne w sensie Riemanna (ewentualnie, całkowalne w sensie zbieżności całek niewłaściwych). Teoria ogólna (wymagająca użycia całki Lebesgue'a) nie będzie tu omawiana, ale przedstawione tu wyniki będzie łatwo rozszerzyć w tym ogólnym kontekście -korzystając jedynie z dwu twierdzeń: o zmajoryzowanej zbieżności i o przybliżaniu funkcji całkowalnych przez funkcje ciągłe.

0.1 Wstępne definicje

$R(a, b)$ oznacza zbiór wszystkich funkcji $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ całkowalnych w sensie Riemanna na przedziale $[a, b]$. (Według jednego z twierdzeń -są to takie funkcje ograniczone, których zbiór punktów

nieciągłości jest miary zero.) Przez $R^2(a, b)$ oznaczę ogół tych funkcji, dla których istnieje zarówno całka niewłaściwa $\int_a^b |f|^2$, jak i całki niewłaściwe z f (chodzi o wykluczenie sytuacji, gdyby znak f , czyli funkcja $t \mapsto \operatorname{sgn} f(t)$ była nieciągła na zbiorze miary dodatniej). Iloczyn takich funkcji będzie miał również zbieżną całkę niewłaściwą. Iloczyn skalarny w $R^2(a, b)$ definiujemy jako całkę:

$$\langle u, v \rangle := \int_a^b u(t)v(t) dt \quad \text{dla } u, v \in R^2(a, b).$$

W przypadku funkcji o wartościach zespolonych (zbiór funkcji, dla których zarówno część rzeczywista, jak i zespolona należą do $R^2(a, b)$ oznaczmy $R_{\mathbb{C}}^2(a, b)$) iloczynem skalarnym jest

$$\langle u, v \rangle := \int_a^b u(t)\overline{v(t)} dt \quad \text{dla } u, v \in R_{\mathbb{C}}^2(a, b).$$

Teraz funkcje będziemy traktowali jako elementy przestrzeni wektorowej ($R^2(a, b)$, lub $R(a, b)$), definiując ich „długość” - tzw. normę średniokwadratową wzorem

$$\|u\|_2 := \left(\int_a^b |u(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (= \sqrt{\langle u, u \rangle}).$$

Dokładniej, jest to norma na $C[a, b]$ -przestrzeni funkcji ciągłych w naszym przedziale, natomiast dla $u \in R^2(a, b)$ równość $\|f\|_2 = 0$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\{t \in [a, b] : u(t) \neq 0\}$ jest miary zero. Na przykład -każdy zbiór przeliczalny jest miary zero, f równa zero wszędzie poza skończoną ilością punktów jest w $R(a, b)$ i nie jest wektorem zerowym tej przestrzeni, ale $\|f\|_2 = 0$. W przypadku funkcji nieciągłych tezy o jednoznaczności rozwinięcia w szereg Fouriera musimy rozumieć z dokładnością do relacji równości „prawie wszędzie”.

Jedynie własności $\|\cdot\|_2$ oraz iloczynu skalarnego, jakie wykorzystamy, to :

(i) *symetria* (w przypadku zespolonym -tzw. „skośna symetria”):

$$\langle u, w \rangle = \overline{\langle w, u \rangle} \quad (1)$$

(ii) *liniowość iloczynu skalarnego względem pierwszej zmiennej*:

$$\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle, \quad u, v, w \in R^2(a, b), \alpha, \beta \in \mathbb{R} (\text{odpowiednio } \in \mathbb{C}), \quad (2)$$

W szczególności,

$$\|u + tv\|^2 = \|u\|_2^2 + 2t\operatorname{Re}\langle u, v \rangle + t^2\|v\|_2^2 \quad , t \in \mathbb{R} \quad (3)$$

(iii) *nierówność Schwarza* (Cauchy’ego-Buniakowskiego-Schwarza):

$$|\langle u, w \rangle| \leq \|u\|_2 \|w\|_2 \quad (4)$$

(iv) *nierówność trójkąta*:

$$\|u + w\|_2 \leq \|u\|_2 + \|w\|_2 \quad (5)$$

(v) *druga nierówność trójkąta* (wynikająca z pierwszej gdy podstawić $u = g, w = f - g$):

$$|\|f\|_2 - \|g\|_2| \leq \|f - g\|_2 \quad (6)$$

(vi) *porównanie norm*:

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)| dt \leq \sqrt{b-a} \|f\|_2 \leq (b-a) \|f\|_{[a,b]} \quad (7)$$

Własności te udowodniliśmy dla całek (właściwych) Riemanna, a przypadek ogólny otrzymamy po przejściach do granic występujących w definicji całki niewłaściwej po obu stronach dowodzonej równości (odp. nierówności). Przypomnijmy, że zbieżność średnio-kwadratowa, czyli względem normy $\|\cdot\|_2$ ciągu funkcyjnego (f_n) do funkcji f_0 oznacza, że $\lim \|f_f - f_0\|_2 = 0$. Dzięki (vi), wynika ona ze zbieżności jednostajnej, czyli względem normy

$$\|f\|_{[a,b]} := \sup\{|f(t)| : t \in [a,b]\}.$$

Zauważmy też, że z całkowej nierówności trójkąta:

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

stosowanej do $f = f_n - f_0$ wynika na podstawie (v), (vi), że całki $\int_a^b f_n(t) dt$ zbiegają do $\int_a^b f_0(t) dt$, o ile zbieżność f_n do f_0 zachodzi w którejkolwiek z trzech norm porównywanych w (v). Ponadto łatwo zauważyć, że gdy $\|v\|_{[a,b]} < +\infty$, to otrzymamy wtedy również zbieżność iloczynów skalarnych

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, v \rangle = \langle f_0, v \rangle. \quad (8)$$

0.2 Układy ortogonalne

Układ nieskończony $(\phi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ (czyli obustronnie nieskończony ciąg) funkcji $\phi_n \in R[a,b]$ nazwiemy **układem ortogonalnym**, (dla odcinka $[a,b]$) gdy dla wszystkich $n, m \in \mathbb{Z}, n \neq m$ mamy $\langle \phi_n, \phi_m \rangle = 0$. Normalizacją takiego układu nazwiemy układ złożony z funkcji $e_n(t) := \frac{1}{\|\phi_n\|_2} \phi_n(t)$. Tak otrzymany układ $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ nazwiemy **układem ortonormalnym**. Oznacza to, że

$$\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{n,m}, \quad (9)$$

gdzie $\delta_{n,m} = 1$ dla $n = m$ oraz $\delta_{n,m} = 0$ gdy tylko $n \neq m$. Dla dowolnego układu ortonormalnego i dla dowolnych układów skalarów (α_n) , gdzie $n = -M, -M+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, M-1, M$ (co skrótowo zapiszemy: $|n| \leq M$) -zachodzi następujące uogólnienie relacji (R), (RF) ze str.1:

LEMAT O WSPÓŁCZYNNIKACH: Gdy

$$g = \sum_{k=-M}^M \alpha_k e_k, \quad (10)$$

to dla $n \in \mathbb{Z}$ mamy

$$\langle g, e_n \rangle = \alpha_n \quad \text{gdy} \quad |n| \leq M \quad \text{oraz} \quad \langle g, e_n \rangle = 0 \quad \text{dla} \quad |n| > M, \quad (11)$$

$$\|g\|_2^2 = \sum_{k=-M}^M |\alpha_k|^2. \quad (12)$$

Faktycznie, gdy zapiszemy g jako sumę, zauważamy, że e_n jest wektorem prostopadłym do prawie wszystkich składników tej sumy -jedynym niezerowym iloczynem skalarnym jest więc $\langle \alpha_n e_n, e_n \rangle = \alpha_n$, dzięki (9). Podobnie sprawdzamy drugą tezę rozpisując $\|g\|_2^2$ jako iloczyn skalarny $\langle g, g \rangle$.

LEMAT O SUMACH CZĘŚCIOWYCH: Dla $f \in R^2(a,b)$ i dla $M \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k \in \mathbb{Z}$ niech

$$c_k(f) := \langle f, e_k \rangle, \quad S_M[f] := \sum_{k=-M}^M c_k(f) e_k \quad (13)$$

Wówczas dla wszystkich $k \in \mathbb{Z}$ jeśli $|k| \leq M$, to $\langle f - S_M[f], e_k \rangle = 0$ oraz

$$\|f\|_2^2 = \|S_M[f]\|_2^2 + \|f - S_M[f]\|_2^2. \quad (14)$$

Prostopadłość $f - S_M[f]$ do e_k wnioskujemy z poprzedniego lematu, stosując (2). Ostatnia równość wynika więc z (3).

Wynikają stąd dwa bardzo ważne lematy:

LEMAT O NAJLEPSZYM PRZYBLIŻENIU: Dla ustalonej liczby $M \in \mathbb{N}$ odległość $\|f - g\|_2$ od $f \in R^2(a, b)$ do dowolnego elementu g postaci (10) jest nie mniejsza, niż odległość od $S_M[f]$, czyli

$$\|f - S_M[f]\|_2 \leq \|f - \sum_{k=-M}^M \alpha_k e_k\|_2$$

Faktycznie, prostopadłość $f - S_M[f]$ do e_k dla $|k| \leq M$ i liniowość (2) iloczynu skalarnego implikują prostopadłość $f - S_M[f]$ do g oraz do $S_M[f] - g$.

Teraz z (TP) (lub (3)) wynika, że $\|f - g\|_2^2 = \|f - S_M[f]\|_2^2 + \|S_M[f] - g\|_2^2$, co daje naszą tezę.

NIERÓWNOŚĆ BESSELA: Ciąg współczynników $c_k(f)$ funkcji $f \in R^2(a, b)$ jest sumowalny z kwadratem, przy czym

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 \leq \|f\|_2^2. \quad (15)$$

Zauważmy najpierw, że wszystkie rozważane tu szeregi są bezwzględnie zbieżne (lub mają wyrazy nieujemne), więc kolejność sumowania, czyli sposób ustawienia w ciąg -nie ma wpływu na wartość sumy. Lewą stronę dowodzonej nierówności traktować możemy więc jako granicę $\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{k=-M}^M |c_k(f)|^2$. Każda z tych ostatnich sum jest, dzięki (12), (14) nie większa, niż $\|f\|_2^2$

1 Układ trygonometryczny

Dla uproszczenia, przyjmijmy w dalszym ciągu $a = -\pi, b = \pi$ i rozważmy układ złożony z funkcji $\sin mt, \cos mt$. Wykorzystując parzystość tych ostatnich funkcji, możemy przyjąć, że $\phi_n(t) = \cos nt$ dla $n \in \mathbb{Z}, n \leq 0$ oraz $\phi_n(t) = \sin nt$ dla $n \in \mathbb{N}$. Nietrudne przeliczenie wskazuje, że jest to układ ortogonalny: $\int_{-\pi}^{\pi} \phi_n(t) \phi_k(t) dt = 0$ dla $n \neq k$. Ponadto $\|\phi_n\|_2$ są równe $\sqrt{\pi}$ gdy $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ oraz $\|\phi_0\|_2 = \sqrt{2\pi}$.

Odpowiadającym mu układem ortonormalnym (czyli normalizacją (ϕ_n)) jest układ funkcji

$$e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \phi_n \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad |t| \leq \pi, \quad e_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Jeszcze wygodniejszy w użyciu jest **zespolony układ trygonometryczny**, $\psi_n(t) := e^{int}$, również określony na przedziale $[-\pi, \pi]$, normy są tu jednakowe: $\forall_{n \in \mathbb{Z}} \|\psi_n\|_2 = \sqrt{2\pi}$, gdyż

$$\langle \psi_n, \psi_k \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \psi_n(t) \overline{\psi_k(t)} dt = 2\pi \delta_{nk}, \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

Tradycyjnie, unikając użycia pierwiastkowania π używa się współczynników sinusowych ($b_n = b_n(f), n \in \mathbb{N}$) i cosinusowych ($a_n = a_n(f), n = 0, 1, 2, \dots$) funkcji okresowej $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o okresie 2π lub funkcji $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ określonych wzorami:

$$a_n(f) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt, \quad b_n(f) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt.$$

Nie są to więc dokładnie współczynniki $c_n(f)$ względem układu unormowanego (e_n) , gdyż np.

$$c_n(f) := \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \phi_n(t) dt = \sqrt{\pi} a_n(f) \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Gdy $n = 0$, $\sqrt{\pi} a_0(f) = 2c_0(f)$. Ale dla $n \neq 0$ mamy

$$c_n(f) e_n(t) = c_n(f) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \phi_n(t) = \begin{cases} a_n \cos nt & \text{gdy } -n \in \mathbb{N} \text{ oraz } \\ b_n \sin nt & \text{dla } n \in \mathbb{N} \end{cases}. \quad (16)$$

Natomiast $c_0(f)e_0(t) = \frac{1}{2}a_0(f)$. Stąd sumy częściowe dane dla układu znormalizowanego wzorem (13), wyrażają się następująco:

$$S_M[f](x) = \sum_{k=-M}^M c_k(f)e_k(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^M (a_n(f) \cos nx + b_n(f) \sin nx) \quad (17)$$

Podstawiając wzory całkowe na współczynniki, otrzymujemy (wykorzystując liniowość całki)

$$\begin{aligned} S_M[f](x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^M \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^M \cos k(x-t) \right] dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_M(x-t) dt, \end{aligned}$$

gdzie przez D_M oznaczamy funkcję, której wartość w punkcie $s := (x-t)$ dana jest w nawiasie kwadratowym. Funkcję tę nazywamy **jądrem caki Dirichleta**. Dotychczas wykorzystaliśmy jedynie wzór na $\cos(\alpha - \beta)$. Teraz wykorzystując inny wzór: $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$, gdzie $\alpha = \frac{s}{2}, \beta = ks$, otrzymamy po zastosowaniu nieparzystości sinusa i skreśleniu powtarzających się (z przeciwnym znakiem) składników, wzór:

$$D_M(s) = \frac{\sin(M + \frac{1}{2})s}{\sin \frac{s}{2}}. \quad (18)$$

Będziemy korzystać z następujących, łatwych w dowodzie, własności tych funkcji:

WŁASNOŚCI D_M : Parzystość ($\forall_t D_M(-t) = D_M(t)$),

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_M(t) dt = \pi \quad (19)$$

$$\forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_M \forall_s, \delta < |s| \leq \pi \Rightarrow |D_M(s)| < \epsilon. \quad (20)$$

Faktycznie, całki każdego ze składników $\cos kx$, z wyjątkiem odpowiadającego $k = 0$ składnika $\frac{1}{2}$, są równe zero. Druga teza wynika z (niezależnego od M) oszacowania licznika we wzorze (18) przez 2, a mianownika -od dołu przez $\sin \frac{\delta}{2}$.

Co ciekawe, również obliczając M -tą sumę częściową dla f względem zespolonego układu ortonormalnego $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\psi_n$ otrzymamy dokładnie taki sam wzór! (Tu korzystamy z faktu, że dla danego $x \in \mathbb{R}$ kolejne wartości e^{ikx} tworzą ciąg geometryczny o ilorazie e^{ix} , zaś liczbą sprzężoną do e^{it} jest e^{-it} .)

Specyfiką obydwu rozważanych układów jest okresowość oraz ograniczoność każdej z funkcji układu (przez tę samą stałą).

Dla funkcji **okresowych** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o okresie $T > 0$ mamy następujący

LEMAT O PRZESUNIĘCIU GRANIC CAŁKOWANIA: Gdy $a \in \mathbb{R}$, to $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$.

Zauważmy, że funkcję określoną na $[-\pi, \pi]$ można przedłużyć do funkcji na $\mathbb{R}$ o okresie 2π , jeśli zmienimy, w razie potrzeby, jej wartość w jednym punkcie -np. w punkcie π . Współczynniki $a_n(f), b_n(f)$ nie ulegną przy tym zmianie, bo są wyrażone przez całkę, a ta jest „niewrażliwa” na zmiany wartości w skończonej ilości punktów. Jedynie możemy popsuć ciągłość, czy też różniczkowalność, ma więc sens pojęcie „funkcja ciągła okresowa na $[-\pi, \pi]$ ”. Gdy obliczamy współczynniki i sumy częściowe $S_M[f]$ szeregu Fouriera, możemy zakładać okresowość f . Wówczas możemy po podstawieniu $s = t + x$ przesunąć granice całkowania, następnie wykorzystać parzystość D_M otrzymując:

$$S_M[f](x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi+x}^{\pi+x} f(t+x) D_M(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+s) D_M(s) ds = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \{f(x-t) + f(t+x)\} D_M(t) dt.$$

Oznaczmy funkcję w nawiasie przez $g(t; x)$. Wówczas $\frac{1}{2}g(t; x)$ zmierza przy $t \rightarrow 0^+$ do średniej arytmetycznej granic: lewo- i prawo-stronnych dla f w punkcie x (czyli do $\frac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0))$). Dirichlet wykazał następujące twierdzenie:

Twierdzenie Dirichleta Gdy $f \in R^2(-\pi, \pi)$ jest w pewnym otoczeniu punktu x różnicą dwu funkcji monotonicznych (czyli funkcją o wahaniu ograniczonym), to wartości $S_M[f](x)$ ciągu sum częściowych szeregu Fouriera funkcji f zmierzają do $\frac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0))$.

Poza częścią rachunkową, wykorzystującą m. inn. równość zachodzącą $\forall a > 0$:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^a \frac{\sin Mt}{t} dt = \frac{\pi}{2}, \quad (21)$$

istotnym elementem dowodu jest inne ważne twierdzenie, znane jako Lemat Riemanna - Lebesgue'a:

Twierdzenie (Lemat R-L) Gdy f ma zbieżną całkę z modułu, czyli $\int_a^b |f(t)| dt < \infty$, to całki $\int_a^b f(t) \sin nt dt$ zmierzają do zera przy $n \rightarrow \infty$.

Gdy $f \in R(-\pi, \pi)$, zaś $a = -\pi$, $b = \pi$, teza „R-L” wynika z nierówności Bessela (15), bo skoro ciąg współczynników Fouriera f względem układu unormowanego ma sumowalne kwadraty modułów, to musi on zmierzać do zera (a współczynniki, przez które mnożymy normalizując wyrazy ϕ_k dla $k \neq 0$ są stałe). Gdy przedział jest krótszy (np. $a = -\pi$, $b < \pi$), to możemy przedłużyć f zachowując pozostałe założenia, jeśli przyjmiemy $f(t) = 0$ dla $t \in (b, \pi]$, przez co sprowadzimy zagadnienie do poprzedniego przypadku. Gdy przedział jest dłuższy, dzielimy $[a, b]$ na skończoną sumę odcinków $[a_k, b_k]$ o długości $\leq 2\pi$ -każdy, całka $\int_{a_k}^{b_k} f(t) \sin nt dt$ wyraża się przez skończoną sumę całek w granicach od a_k do b_k -które zmierzają do zera przy $n \rightarrow \infty$. Pozostaje wytłumaczyć, dlaczego założenie $f \in R(a, b)$ można osłabić do założenia o zbieżności $\int_a^b |f(t)| dt$, co prześledzimy w przypadku, gdy jest to całka niewłaściwa z punktem niewłaściwym b . Dla $a < \beta < b$ niech $f_\beta(t) = f(t)$ dla $t \in [a, \beta]$ oraz $f_\beta(t) = 0$ dla $\beta < t \leq b$. Jeśli (a tak zakładamy) b jest jedynym punktem niewłaściwym, to $f_\beta \in R(a, b) \subset R^2(a, b)$, zaś $\|f - f_\beta\|_1 = \int_\beta^b |f(t)| dt$ zmierza do zera przy $\beta \rightarrow b^-$. Wynika to niemal bezpośrednio z definicji całki niewłaściwej, jako granicy $\lim_{\beta \rightarrow b^-} \int_a^\beta \dots$. Mając więc zadane $\epsilon > 0$ dobieramy najpierw $\beta < b$ tak, by $\int_a^\beta |f(t)| dt < \int_a^b |f(t)| dt + \frac{\epsilon}{2}$, czyli $\|f - f_\beta\|_1 < \frac{\epsilon}{2}$. Dla f_β - funkcji z $R(a, b)$ stosujemy poprzednią część dowodu wyznaczając n_0 tak, by dla $n \geq n_0$ było $|\int_a^b f_\beta(t) \sin nt| < \frac{\epsilon}{2}$. Wystarczy jeszcze skorzystać z nierówności trójkąta i z oszacowania $|\int_a^b f(t) \sin nt dt - \int_a^b f_\beta(t) \sin nt dt| \leq \int_a^b |f(t) - f_\beta(t)| \sin nt| dt \leq \|f - f_\beta\|_1 \leq \frac{\epsilon}{2}$.

2 Sumowanie metodą średnich

Już w II połowie XIX w. (1873) zauważono, że dla funkcji ciągłych okresowych szereg Fouriera może nie być zbieżny jednostajnie, a nawet punktowo, do rozwijanej funkcji f . Z punktu widzenia praktyki wiadomo, że zakłócenia w teorii sygnałów związane są z ”pewną nadreprezentacją wysokich częstotliwości”, czyli składników $a_n(f) \cos nx$, $b_n(f) \sin nx$ dla dużych wartości n . Podana poniżej prosta procedura prowadzi do tłumienia wpływu tych składników i eliminuje ich niekorzystny wpływ na rekonstrukcję sygnału wyjściowego f . Gdy ciąg $S_n[f]$ dąży do f , ciąg średnich arytmetycznych będzie też zbieżny do tej samej granicy. Ale średnie mogą być (i będą, jak wykażemy dla f ciągłej, okresowej) zbieżne do f również w sytuacji, gdy sam ciąg $S_n[f]$ jest rozbieżny. Dokładniej, definiujemy:

Średnią Cesàro rzędu M dla f nazwiemy funkcję daną wzorem

$$\sigma_M[f](x) = \frac{1}{M+1} (S_0[f](x) + S_1[f](x) + \dots + S_M[f](x))$$

Jeśli zastosować dodawanie (dla $N = 0, 1, \dots, M$) stronami do wzoru całkowego

$$S_N[f](x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_N(t) dt,$$

otrzymamy następujący wzór:

$$\sigma_M[f](x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left\{ \frac{D_0(t) + \dots + D_M(t)}{M+1} \right\} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) K_M(t) dt, \quad (22)$$

w którym $K_M(t)$ oznacza średnią arytmetyczną $\frac{D_0(t) + \dots + D_M(t)}{M+1}$, zwaną jądrem całki Fejéra

Twierdzenie Fejéra. Średnie Cesàro funkcji ciągłej, okresowej o okresie 2π zmierzają jednostajnie do f na przedziale $[-\pi, \pi]$.

(dokończę wkrótce)