

Zagadnienia do egzaminu z analizy (kierunek "Elektrotechnika", II semestr, 2023)

- Całka Riemanna:** W różnych sytuacjach (mając podany dla ułatwienia układ punktów podziału odcinka i punktów pośrednich) **napisać postać sum całkowych**. Co oznacza **normalność** ciągu podziałów, a co - **całkowalność funkcji**. Np. dla całki krzywoliniowej skierowanej wzdłuż krzywej $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ punkty γ_j podziału krzywej są obrazami punktów podziału $\{t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b\}$ odcinka parametryzującego, czyli $\gamma_j = \gamma(t_j)$, wektory cięciw, to $\gamma_j - \gamma_{j-1}$ a punkty pośrednie $P_j = \gamma(\lambda_j)$ odpowiadają punktom pośrednim $\lambda_j \in [t_{j-1}, t_j]$ dla podziału odcinka. W punktach P leżących na krzywej określone jest pole wektorowe $\vec{F}(P)$, które całkujemy. Dla całek podwójnych z funkcji po prostokącie podział wyznaczają prostokąty Q_j i mamy punkty pośrednie $P_j \in Q_j$.
Własności całek: liniowa zależność od funkcji podcałkowej (zapisać dla konkretnych funkcji f_1, f_2 i stałych c_1, c_2 -co to oznacza), addytywność względem drogi całkowania, czyli zbioru, po którym całkujemy. Dla zwykłych całek po odcinku- **monotoniczność całki**, **twierdzenie o wartości średniej całkowej**. Wzór Newtona- Leibniza (związek $\int_a^b f(t) dt$ z funkcją pierwotną i pochodną wzgl. zmiennej x z całki $\int_a^x f(t) dt$ (w przypadku f ciągłej)).
- Wzory** na: pole trapezu krzywoliniowego, długość łuku krzywej (klasy C^1 , zadanej parametrycznie). **Różniczka elementu długości takiej krzywej**. Objętość bryły obrotowej i pole jej powierzchni bocznej. Współrzędne środka ciężkości krzywej materialnej o zadanej funkcji gęstości liniowej. Masa powierzchni o zadanej gęstości powierzchniowej. **Różniczka elementu powierzchni wykresu funkcji 2 zmiennych**
- Całki niewłaściwe:** definicja zbieżności, kryterium porównawcze, warunek Cauchy'ego.
- Iloczyn skalarny, norma w przestrzeni wektorowej**, norma euklidesowa (pochodząca od iloczynu skalarnego) nierówność Cauchy'ego - Buniakowskiego - Schwarz'a. Norma średniokwadratowa dla funkcji $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Ortogonalność, tw. Pitagorasa. Ciągi ortonormalne, nierówność Bessela, współczynniki Fouriera wektora (np. funkcji) względem układu ortonormalnego. Tożsamość Parsevala.
- Układ trygonometryczny.** Wzory na współczynniki w szeregu Fouriera (dla okresu 2π), przypadek funkcji parzystych /nieparzystych, Warunek Dirichleta, tw. o zbieżności szeregu w danym punkcie.
- Pochodne cząstkowe**, wyrażenie przy ich pomocy przyrostu funkcji (dla 2 zmiennych). **Pochodna kierunkowa**, kierunek maksymalnego wzrostu (uzasadnienie w przypadku funkcji różniczkowalnych, że jest to kierunek gradientu). **Równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji dwu zmiennych**.
- Definicje:** Granicy funkcji w punkcie $P_0 \in \mathbb{R}^n$; ciągłości funkcji wielu zmiennych; różniczkowalności; różniczki zupełnej (jako odwzorowania liniowego...); macierzy Jacobiego; ekstremum lokalnego; punktu stacjonarnego; macierzy Hessego; macierzy dodatnio określonej; rotacji i dywergencji pola wektorowego.
- Twierdzenia:** - O różniczkowalności funkcji, której pochodne cząstkowe są ciągłe; -O różniczkach złożenia, (+ wzór na pochodną typu $\frac{d}{dt} f(x(t), y(t))$, gdy $f(x, y), x(t), y(t)$ są funkcjami klasy C^1);
-O symetrii drugiej różniczki (pochodnych mieszanych);
-Wzór Taylora z drugą różniczką (dla funkcji 2 zmiennych);
- Warunek konieczny (odp. warunek wystarczający) na ekstremum lokalne dla funkcji klasy C^2 .
- Tw. o funkcjach uwikłanych, warunek na ekstremum lokalne takiej funkcji.
- Ekstremum warunkowe- sformułowanie tw. o warunku koniecznym (z funkcją Lagrange'a).
-Tw. o iterowaniu w przypadku całki po prostokącie oraz po obszarze normalnym.
- Zamiana całki podwójnej na całkę we współrzędnych biegunowych, całki potrójnej -na całkę we wsp. cylindrycznych i sferycznych.
- Wzór Greena.
- Całka powierzchniowa nieorientowana $\int_{\sigma} f(x, y, z) dS$. Strumień pola przez powierzchnię zorientowaną ($\int_{\sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$ albo $\int_{\sigma} \vec{F} d\vec{\sigma}$ (-chodzi o wzory, gdy σ jest wykresem -lub opisana parametrycznie.)
- Wzory:** Gaussa-Ostrogradskiego i Stokesa.