Analiza matemat. 1 na kier. "Elektrotechnika" - wykład nr 10. (16.XII 2020)

21 Metody całkowania

Przypomnijmy, że mamy metodę całkowania przez części:

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx \tag{1}$$

oraz całkowania przez podstawienie:

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = F(\phi(x)) + C, \quad \text{gdzie} \quad F(y) + C = \int f(y)\,dy. \tag{2}$$

Zacznijmy od przykładów zastosowania reguły (1). Dla stałej $a \neq 0$ mamy

$$\int xe^{ax}\,dx = \int x(\frac{1}{a}e^{ax})'\,dx = \frac{1}{a}\big(xe^{ax} - \int (x)'e^{ax}\,dx\big) = \frac{1}{a}e^{ax}\big(x - \frac{1}{a}\big) + C$$

Gdy $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ jest wielomianem, to stosując (1) n-krotnie do całki typu $\int P(x)e^x\,dx$ obniżymy stopień wielomianu aż dojdziemy do $\int c_0 e^n$. Dokladniej, korzystając z liniowości całki mamy $\int P(x)e^x\,dx = \sum_{k=0}^{n} a_k \int x^k e^x\,dx$ i każdy ze składników liczymy z osobna. Na przykład,
$\int x^k e^x\,dx = x^k e^x - \int kx^{k-1}e^x\,dx = x^k e^x - \big(kx^{k-1}e^x - \int k(k-1)x^{k-2}e^x\big) = \cdots = e^x\big(x^k - kx^{k-1} + k(k-1)x^{k-2} - \cdots + (-1)^k k!\big) + C$.

Metody całkowania przez części używa się przy całkowaniu funkcji odwrotnych do elementarnych: typu $\log x$, $\arcsin x, \operatorname{arctg} x$, oraz do "sprowadzania pierwiastków $\sqrt{1 \pm x^2}$ do mianownika": Wprowadzamy "sztuczną jedynkę"- czyli $f'(x) = 1$ (co odpowiada wyborowi $f(x) = x$) we wzorze (1). Na przykład,

$$\int \arcsin x\,dx = \int (x)'\arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \boxed{\substack{u=1-x^2,\\ du=-2xdx}}$$

$= x\arcsin x - \int u^{-\frac{1}{2}}(-\frac{1}{2}\,du) = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$, bo $\int \frac{1}{2\sqrt{u}}\,du = \sqrt{u} + C$.[1]

Analogicznie postępujemy całkując arctg , mianownik jego pochodnej, czyli $1+x^2$ podstawiamy jako nową zmienną (np. u). Wówczas $du = 2x\,dx$. Całkując logarytm, lub np. funkcję $x^n \ln|x|$ nie potrzebujemy nawet podstawień. Dla $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ mamy bowiem dla $f(x) = \int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ całkę przekształcaną jak następuje: $\int x^n \ln|x| = f(x)\ln|x| - \int f(x)\frac{1}{x}\,dx = f(x)\ln|x| - \frac{1}{n+1}\int x^n\,dx$ $= f(x)(\ln|x| - \frac{1}{n+1}) + C$.

Ciekawe jest zastosownie metody (1) dla całki $\mathcal{A} := \int e^{ax}\sin bx\,dx$:

Przyjmujemy we worze(1) $f'(x) = e^{ax}$, czyli $f(x) = \frac{1}{a}e^{ax}$. Wtedy $\mathcal{A} = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx$. Teraz podobną metodą liczymy pojawiającą się po prawej stronie całkę $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx$. Wstawiając to do poprzedniej równości otrzymamy

$$\mathcal{A} = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx - \frac{b^2}{a^2}\mathcal{A}.$$

Przenosząc na lewą stronę ostatni składnik, co daje $\frac{a^2+b^2}{a^2}\mathcal{A}$, po prostych algebraicznych przekształceniach otrzymamy

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\big(a\sin bx - b\cos bx\big) + C.$$

Ogólnie, gdy szukana całka pojawi się też po przekształceniach z zastosowaniem (1) również po prawej stronie, ale ze współczynnikiem różnym od +1, to przenosząc ją na drugą stronę równości możemy wyliczyć szukany wynik.

[1] Zazwyczaj opisujemy podstawienie używając zamias kwadratowej ramki -dwu falistych linii pionowych po bokach. Nad znakiem równości -wzór podstawienia, a poniżej = -wzór na różniczkę podstawienia.

Przykładem może być liczenie całki $\mathcal{J} = \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$, gdzie $a > 0$. Przypomnijmy, że $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + C$, zastępując 1 przez a^2 wyłączymy a przed pierwiastek, zaś podstawiając $\frac{x}{a} = u$ wyliczamy stosując regułę (2), że $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = \int \frac{1}{a\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}\, dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$.

Powracając do całki J i przyjmując w (1) jako $f(x)$ funkcję x, mamy

$$J = \int f'(x)\sqrt{a^2 - x^2} = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{x \cdot (-2x)}{2\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = .$$

Licznik ostatniej całki (po uproszczeniu 2 i znaku "-" przed całką i w liczniku) jest równy $a^2 - x^2 - a^2$. Pierwsze dwa składniki licznika podzielone przez mianownik, to dokładnie $\sqrt{a^2 - x^2}$, więc

$$\mathcal{J} = x\sqrt{a^2 - x^2} - \mathcal{J} + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Stąd $2\mathcal{J} = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} + C$.

Postępując podobnie z całką $2\int \sqrt{x^2 + a^2}$ otrzymamy jej wartość w postaci $x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\, dx$. Całka w drugim składniku po prawej stronie wynosi $\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right|$. Ten ostatni fakt można uzyskać (w przypadku $a = 1$) podstawiając $x = \sinh t$. Faktycznie, sinus hiperboliczny, czyli $\frac{e^t - e^{-t}}{2}$ daje wraz z kosinusem hiperbolicznym (czyli z funkcją $\cosh t := \frac{e^t + e^{-t}}{2}$) tak zwaną "jedynkę hiperboliczną": $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$, zaś funkcją odwrontą do $x = \sinh t$ jest funkcja polowa "area sinus hiperboliczny": $t = \operatorname{ar}\sinh\, x = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$. Ponadto $dx = \sinh'(t)\, dt = \cosh t\, dt$. Całkowanie przez podstawienie daje więc

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 t}}\, dx = \int 1 dt = t = \operatorname{ar}\sinh\, \mathrm{x} + C = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) + C.$$

Innym ważnym zastosowaniem metody całkowania przez częsci są tzw. wzory redukcyjne wyrażające całki typu $S_n = \int (\sin x)^n\, dx$, $J_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx$ poprzez całki o niższej wartości n , gdzie $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Oczywiście znamy wartości dla $n = 1$: $S_1 = -\cos x + C$, $J_1 = \operatorname{arctg} x + C$. Na przykład, (1) stosujemy dla S_n w postaci $S_n = \int (-\cos' x) \sin^{n-1} x\, dx$, w otrzymanej po prawej stronie (1) całce $\int (-\cos x)(n-1)\sin^{n-2}(x) \cdot \cos x\, dx$ podstawiamy $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, co sprowadza tę całkę do postaci $(n-1)S_n - (n-1)S_{n-2}$. Uzyskujemy po prostych przekształceniach wzór redukcyjny postaci $S_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} S_{n-2}$.

Jeszcze ważniejszy jest wzór dla

$$J_n = \int \frac{1}{(1 + x^2)^n}\, dx = \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(1 + x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} J_{n-1}. \tag{3}$$

Można go uzyskać zastępując w liczniku pod całką 1 przez $1 + x^2 - x^2$, całkując najpierw przez podstawienie $u = 1 + x^2$ w całce $\int \frac{x}{(1+x^2)^n} = f(x)$. Następnie traktując $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ jako $\int x \cdot f'(x) dx$ stosujemy wzór (1).

21.1 Całkowanie funkcji wymiernych

Funkcję postaci $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ nazywamy funkcją wymierną, jeśli licznik i mianownik są wielomianami, a stopień mianownika [oznaczenie: $\deg(Q)$] jest > 0 (lub $Q(x)$ jest niezerową stałą). Proces dzielenia z resztą przez wielomian $Q(x)$ umożliwia sprowadzenie $R(x)$ do postaci sumy wielomianu oraz "ułamka właściwego"- gdzie stopień wielomianu z licznika jest mniejszy od $\deg(Q)$. Całkowanie wielomianów jest banalnie proste, więc bez straty ogólności będziemy dalej zakładali, że $R(x)$ jest ułamkiem właściwym. Mamy wówczas twierdzenie o rozkładzie $R(x)$ na ułamki proste, czyli na sumę funkcji postaci

$$\frac{A_1}{(x-a)^k}, \quad \texttt{lub postaci} \quad \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k}, \quad k \in \mathbb{N}, k \leqslant m \tag{4}$$

gdzie A_1, A, B są pewnymi stałymi, a jest pierwiastkiem wielomianu Q, czyli $Q(a) = 0$, zaś $k \in \mathbb{N}, k \leqslant m$, gdzie m jest krotnością tego pierwiastka. Jest to taka liczba naturalna m, że $Q(x)$ dzieli się przez $(x-a)^m$, ale już nie dzieli się już przez $(x-a)^{m+1}$. Jak łatwo sprawdzić, m jest taką liczbą naturalną, że $Q(a) = 0$ i pochodne $Q'(a), \dots, Q^{(m-1)}(a)$ są równe zero w punkcie a, zaś $Q^{(m)}(a) \neq 0$. Natomiast trójmian $x^2 + px + q$ ma być nieprzywiedlny, czyli bez pierwiastków rzeczywistych - w naszym przypadku -ma być on stale dodatni w $\mathbb{R}$. Liczba m ma być jego "krotnością" -największą z potęg takich, że $(x^2 + px + q)^m$ jest dzielnikiem $Q(x)$ w zbiorze wszystkich wielomianów (= krotność pierwiastka zespolonego wielomianu Q).

Twierdzenie. Każda funkcja wymierna jest sumą wielomianu oraz pewnej (skończonej) ilości "ułamków prostych" opisanej powyżej postaci. Jest więc całkowalna w klasie funkcji elementarnych.

Dowód opiera się na *Zasadniczym Twierdzeniu Algebry*, które mówi, że każdy wielomian ma przynajmiej jeden pierwiastek w ciele $\mathbb{C}$ liczb zespolonych. Twierdzenie Bezouta mówi z kolei, że $z_0 = \alpha + i\beta$ jest pierwiastkiem (rzeczywistym, bądź zespolonym) wielomianu $Q(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $Q(x)$ jest podzielny w zbiorze wielomianów przez jednomian $x - z_0$. Szczegóły pominiemy. Ważniejsza jest dla nas metoda znajdywania współczynników typu A_1, A, B ze wzorów (4), zwana metodą czynników nieoznaczonych. Zakładamy, że znamy już wszystkie pierwiastki zespolone wielomianu $Q(x)$ wraz z ich krotnościami. Gdy $z_0 = \alpha + i\beta$ jest pierwiastkiem zespolonym wielomianu $Q(x)$ o współczynnikach rzeczywistych (a tak zawsze jest w tej części kursu), to również liczba sprzężona: $\bar{z}_0 := \alpha - i\beta$ jest pierwiastkiem Q. Załóżmy, że $\beta \neq 0$. Wielomian Q jest wtedy podzielny przez iloczyn

$$(x - z_0)(x - \bar{z}_0) = (x - \alpha)^2 + \beta^2. \tag{5}$$

Każdy wielomian nieprzywiedlny typu $x^2 + px + q$ (czyli taki, którego wyróżnik $\Delta = p^2 - 4q$ jest ujemny) można zapisać w postaci $(x - \alpha)^2 + \beta^2$, co po podstawieniach prostego typu pozwala przekształcać całki z ułamków prostych drugiego typu do całek $\int \frac{Ax+b}{(x^2+1)^k}$. Pierwszy ze składników licznika daje możliwość łatwego całkowania z podstawieniem $u = x^2+1$, gdzie $du = 2xdx$, a drugi podpada pod schemat wzorów redukcyjnych (3). Metoda czynników nieoznaczonych polega na potraktowaniu stałych wystepujących w licznikach ułamków prostych (4) jako niewiadomych. Sumę ułamków prostych dającą $R(x)$ sprowadzamy do wspólnego mianownika, którym jest wielomian $Q(x)$. Porównujemy teraz otrzymany w wyniku sumowania ułamków prostych licznik z liczikiem $P(x)$. Współczynniki przy analogicznych potęgach x dla równych wielomianów muszą być jednakowe, więc otrzymamy układ równań liniowych. Będzie tyle równań, ile niewiadomych i nie będzie to układ sprzeczny. Pozwala to na znalezienie *explicite* współczynników rozkładu $R(x)$ na ułamki proste (o ile znamy już pierwiastki mianownika: $Q(x)$ i jego czynniki nieprzywiedlne. Czasami rozkładając funkcję wymierną (np. $\frac{1}{1+x^4}$) na ułamki proste -nie znamy tych czynników nieprzywiedlnych, jednak możemy znaleźć pierwiastki zespolone -ich iloczyn, jak w (5) da nam wzór na (rzeczywiste) czynniki nieprzywiedlne.

Rozłóżmy np. funkcję $R(x) = \frac{x}{(x^2-1)(x-2)}$ na ułamki proste. W tym łatwym przypadku mamy pierwiastki mianownika równe $1, -1, 2$ – o krotności 1 każdy. Stąd dla pewnych $A, B, C \in \mathbb{R}$ będzie $R(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$, co po sprowadzeniu do wspólnego mianownika daje porównanie liczników: $x = A(x+1)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+1)$. Porównując wielomian po lewej stronie tej równości, który można zapisać jako $0 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^0$ z wielomianem po prawej (stopnia 2) otrzymamy układ równań z porównania czynników przy analogicznych potęgach x, np. $0 = A + B + C$, $1 = -2A + A + (-3B) + 0 \cdot C = 1$, $-2A + 2B - C = 0$, skąd wyliczamy, że $A = -\frac{1}{2}, B = -\frac{1}{6}, C = \frac{2}{3}$. Stąd $\int R(x)\,dx = -\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x+1| + \frac{2}{3}\ln|x-2| + c.$ [2]

Całkując funkcję wymierną $R_1(x) = \frac{x^6+2x^4=2x^2-1}{x(x^2+1)^2}$, która nie jest ułamkiem

[2] Tym razem, aby uniknąć kolizji z oznaczeniem C, stałą całkowania oznaczam wyjątkowo małą literą c.

właściwym, musimy zacząć od dzielenia z resztą: $R_1(x) = x + \frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}$ i dopiero ostatni ułamek rozkładamy jako sumę $\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{2x}{(x^2+1)^2} + \frac{x}{x^2+1.}$ Teraz (nawet bez użycia wzoru redukcyjnego na J_2 -a jedynie stosując podstawienie $u = x^2+1$ otrzymamy

$$\int \frac{x^6+2x^4=2x^2-1}{x(x^2+1)^2} = \frac{x^2}{2} - \ln|x| - \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

21.2 Całki "sprowadzalne do postaci wymiernej"

Wiele typów całek można, dzięki odpowiednim przekształceniom, sprowadzić do całek z funkcji wymiernych. Wprowadźmy najpierw pojęcie wielomianu dwu zmiennych [np. dla zmiennych x, y weźmy $P(x,y) = x^7+y^5+4x^3y^2+xy^5+y-x+3$]. Jeśli $Q(x,y)$ jest innym wielomianem tego typu, różnym od stale równego 0, to ich iloraz $R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ nazywamy funkcją wymierną zmiennych x, y. Analogicznie można zdefiniować funkcje wymiernie zależne od większej ilości zmiennych.

Twierdzenie. Jeśli podstawimy za x funkcję $\sin t$, a w miejsce y -funkcję $\cos t$, to podstawienie $u = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$ sprowadzi całkę $\int R(\sin t, \cos t)\,dt$ do całki z pewnej funkcji wymiernej zmiennej u. Przy tym podstawieniu

$$\sin t = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos t = \frac{1-u^2}{1+t^2}, \quad dt = \frac{2du}{1+u^2}.$$

Warto wspomnieć, że w sytuacji, gdy R jest nieparzysta względem jednej ze zmiennych, jedno z podstawień: $u = \sin t$-gdy $R(x,-y) = -R(x,y)$ [odp. $u = \cos t$] da spore uproszczenie obliczeń. Podstawienie "uniwersalne" $u = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$ działa w każdym przypadku, lecz prowadzi czasami do długich obliczeń. Twierdzenie nie obejmuje funkcji postaci $R(t, \sin t)$ -w szczególności można wykazać,że całki typu $\int \frac{\sin t}{t}\,dt$ nie da się wyrazić przez funkcje elementarne. Można ją wyliczyć jedynie jako granicę sum częściowych szeregów potęgowych.

Z kolei, całki z funkcji postaci $2\sin\alpha t \cdot \cos\beta t$ przekształcamy do postaci całki z funkcji $\sin(\alpha+\beta)t + \sin(\alpha-\beta)t$. Podobnie, możemy korzystać ze wzoru $2\cos\alpha t \cdot \cos\beta t = \cos(\alpha+\beta)t + \cos(\alpha-\beta)t$. Przyda się to w teorii szeregów Fouriera.

Do postaci wymiernej można też sprowadzić całki z funkcji złożonych postaci

$$R(x, t(x)^{r_1}, t(x)^{r_2}, \ldots t(x)^{r_k}),$$

gdzie $r_1, \ldots r_k$ są liczbami wymiernymi, $t(x)$ jest funkcją wymierną postaci $t(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, $ad - bc \neq 0$, zaś $R(x, y_1, y_2, \ldots y_k)$ jest funkcją wymierną $k+1$ zmiennych. Jeśli m jest wspólnym mianownikiem dla $r_1, \ldots r_k$, to podstawiamy $u = t(x)^{\frac{1}{m}}$. Wówczas $x = \frac{du^m-b}{a-cu^m} =: \phi(u)$, więc $dx = \phi'(u)\,du$, zaś ponieważ $\forall_j$ mamy $t(x)^{r_j} = u^{mr_j}$, gdzie wszystkie liczby mr_j są całkowite, otrzymujemy po tym podstawieniu faktycznie całkę z funkcji wymiernej zmiennej u. Oto często cytowany przykład (w którym $m = 6$),

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = 6\int \frac{u^3\,du}{u+1} = 6(\frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2} + u - \ln|u+1|) + C = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln|\sqrt[6]{x}+1| + C.$$

Dla całek typu $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ stosujemy dość nietrywialne *Podstawienia Eulera*. W najważniejszym przypadku: $a > 0$ podstawiamy zmienną t spełniającą równanie

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a} + t.$$

Podnosząc stronami do kwadratu -upraszczamy ax^2 po obu stronach równości, wyliczając $x = x(t) = \frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}}$, co w sposób wymierny zależy od t, podobnie, jak pochodna: $x'(t)$, dajac wymierną postać $dx = x'(t)\,dt$. Możemy w ten sposób ponownie wyliczyć $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.