8 Kresy -c.d.

Gdy $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ jest zbiorem skończonym, to M jest majorantą A dokładnie wtedy, gdy zachodzi koniunkcja nierówności: $a_1 \leqslant M, a_2 \leqslant M, \dots, a_n \leqslant M$, czyli gdy największy element tego zbioru A, oznaczany $\max A$ jest nie większy, niż M. Najmniejsza z majorant, czyli $\sup A$ spełnia więc równość:

$$\sup\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

Ogólniej: gdy $E \subset \mathbb{R}$ jest dowolnym zbiorem, to może się zdarzyć, że jedna z jego majorant należy do E - wtedy mówimy, że jest to **element największy zbioru** E i oznaczamy go $\max E$. Ale zbiór nieskończony nie musi posiadać elementu największego nawet, gdy jest ograniczony. Na przykład, ciąg o wyrazach $g_n := 1 - \frac{1}{n}$ jest silnie rosnący, więc żaden z jego wyrazów nie jest największy (w zbiorze $G := \{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ wyrazów tego ciągu). Natomiast istnieje tu kres górny, równy $\sup G = \lim g_n = 1$. To nie jest wyjątek:

Twierdzenie 1. Gdy ciąg (a_n) jest niemalejący i ograniczony, to jest on zbieżny do granicy równej kresowi górnemu:

$$\lim a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Jeśli pominiemy dowód faktu, że każdy niepusty zbiór ograniczony zawarty w $\mathbb{R}$ ma kres górny,[1] to reszta dowodu jest prostą konsekwencją definicji: Oznaczmy przez α ten kres: $\alpha := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Aby wykazać, że $a_n \to \alpha$ wystarczy wskazać dla dowolnie wybranego $\epsilon > 0$ takie "miejsce n_0 w ciągu $\mathbb{N}$", że dla wszystkich $n \geqslant n_0$ (czyli począwszy od tego miejsca) mamy $|a_n - \alpha| < \epsilon$. Ta nierówność z modułem jest równoważna koniunkcji 2 nierówności:

$$\alpha - \epsilon < a_n < \alpha + \epsilon. \tag{3.1}$$

Druga z tych nierówności zachodzi dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Faktycznie, skoro α jest majorantą, to $a_n \leqslant \alpha$, a ponieważ $\alpha < \alpha + \epsilon$, postulowana ostra nierówność wynika z przechodniości relacji $\leqslant$. Kluczowa będzie więc pierwsza z nierówności - ona już nie musi zachodzić "$\forall_n$" . Ale ponieważ $\alpha - \epsilon < \alpha$, zaś supremum jest najmniejszą z majorant, to $\alpha - \epsilon$ nie jest majorantą, czyli

$$\exists_{n_0 \in \mathbb{N}}\ \alpha - \epsilon < a_{n_0}.$$

Ale ciąg nie maleje, więc gdy $n > n_0$, to $a_{n_0} \leqslant a_n$. Dla $n > n_0$ z przechodniości relacji $<$ otrzymujemy więc również pierwszą z nierówności (3.1).$\square$

Kres dolny, nazywany też **infimum** zbioru $A \subset \mathbb{R}$, to największe ograniczenie dolne (minoranta) tego zbioru, czyli taka liczba $\beta \in \mathbb{R}$, że

(i) $\forall_{a \in A}\ \beta \leqslant x$ (tzn. β jest min minorantą);

(ii) $\left(\forall_{a \in A} a \geqslant y\right) \Rightarrow y \leqslant \beta$ (maksymalność wśród minorant).

Nie będziemy się nad tym pojęciem zatrzymywać, bo $\inf A = \sup\{-a : a \in A\}$, dla ciągów zaś $\lim(-a_n) = -\lim a_n$. W szczególności, każdy ciąg malejący (lub nierosnący) i ograniczony (x_n) ma granicę równą $\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Dla zbiorów niepustych, ograniczonych $A, B \subset \mathbb{R}$ niech $A + B := \{a + b \in \mathbb{R} : a \in A, b \in B\}$. Podobnie, niech $A \cdot B := \{ab \in \mathbb{R} : a \in A, b \in B\}$. Można wykazać, że zawsze $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$, zaś

$$A, B \subset \mathbb{R}_+ \Rightarrow \sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B. \tag{3.2}$$

[1] Dowód ten został naszkicowany w podrozdziale 1.7 (str.9) pliku "1i2w.pdf" dostępnego pod linkiem: "materiały do 2 pierwszych wykładów ..." na mojej stronie www.

Natomiast gdy $A \subset \mathbb{R}_+, B \subset \mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$, to $\sup(A \cdot B) = \inf A \cdot \sup B$. Podobnie, gdy $A \subset (0, \infty)$ jest ograniczony, to $\inf\{\frac{1}{x} : x \in A\} = \frac{1}{\sup A}$. Gdy A jest nieograniczony z góry (odp. z dołu), to piszemy $\sup A = +\infty$ (odpowiednio, $\inf A = -\infty$), przy czym $\frac{1}{\pm\infty} = 0$.

W ramach treningu sprawdźmy równość (3.2), bo za chwilę ją wykorzystamy: Dla $A, B \subset [0, +\infty]$ niech $\alpha = \sup A, \beta = \sup B$. Mnożenie nierówności liczb nieujemnych stronami implikuje dla dowolnych $a \in A, b \in B$, że $ab \leqslant \alpha\beta$, więc $\sup(A \cdot B) \leqslant \alpha\beta$. Aby wykazać, że ta majoranta jest najmniejsza, wystarczy znaleźć ciąg $a_n b_n \in A \cdot B$ zbieżny do $\alpha\beta$ (ostatnie zdanie z poprzedniego wykładu w formie PDF. Z tej samej obserwacji wynika, że istnieją ciągi: $a_n \in A$, $b_n \in B$ zbieżne odpowiednio do α, β. Z twierdzenia o granicy iloczynu ciągów wynika, że faktycznie $a_n b_n \to \alpha\beta$. $\square$

9 Funkcje wykładnicze, logarytmy

Dla liczby $a > 0, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$ zdefiniowaliśmy "krok po kroku" wartości: $a^n, a^k, a^{\frac{k}{n}}$. Oczywiście, $1^r = 1, a^0 = 1$. Można na tym etapie wykazać, że $\forall_{r,s \in \mathbb{Q}}$

$$a^{r+s} = a^r a^s \quad \texttt{oraz} \quad a^{rs} = (a^r)^s. \tag{3.3}$$

Ponadto dla $h \in \mathbb{Q}$ mamy implikacje:

$$(a > 1,\ h > 0) \ \Rightarrow\ a^h > 1. \tag{3.4}$$

Dowód jest tu czysto algebraiczy: prosty, ale żmudny -najpierw dla $r = n \in \mathbb{N}$ metodą indukcji, potem dla $r \in \mathbb{Z}$ i w końcu dla $r \in \mathbb{Q}$. Szczegóły pominiemy. Można stąd wywnioskować, że gdy funkcja: $\mathbb{Q} \ni t \mapsto a^t \in \mathbb{R}$ jest silnie rosnąca. Faktycznie, $a^{t+h} - a^t = a^t(a^h - 1) > 0$. Z podobnych względów gdy $0 < a < 1$, taka funkcja maleje. Z punktu widzenia analizy istotny jest następny krok:
Definicja. Gdy $a > 1$, to dla $x \in \mathbb{R}$ przyjmujemy $a^x := \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q}, r \leqslant x\}$. Dla $a = 1$ przyjmujemy $a^x = 1$. Gdy natomiast $a \in (0, 1)$, to $a^x := (\frac{1}{a})^{-x}$. Otrzymaną w ten sposób funkcję $\mathbb{R} \ni x \mapsto a^x \in \mathbb{R}$ nazywamy **funkcją wykładniczą o podstawie** a.

Jak stąd wynika, gdy $x > 0, x \in \mathbb{R}$, to dla $a > 1$ jest $a^x > 1$. Faktycznie, istnieją $h \in \mathbb{Q}$ takie, że $0 < h < x$, więc z definicji supremum, $a^h \leqslant a^x$ i wystarczy odwołać się do (3.4). Korzystając z (3.3) oraz z (3.2) uogólniamy równość (3.3) na dowolne wartości $r, s \in \mathbb{R}$. Jest to podstawowa własność funkcji wykładniczej. Wyniknie z niej np. monotoniczność tej funkcji (silnie rośnie gdy $a > 1$, maleje dla $a \in (0, 1)$), jak również ciągłość.

Twierdzenie 2. Dla $a > 0$ zachodzą następujące tezy:

(i) $\lim \sqrt[n]{a} = 1$

(ii) Gdy $h_n \in \mathbb{R}$ oraz $\lim h_n = 0$, to $\lim a^{h_n} = 1$

(iii) Funkcja wykładnicza jest ciągła, a dla $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ jest bijekcją z $\mathbb{R}$ na $(0, +\infty)$.

Dowód (i)-jeśli zapiszemy $\sqrt[n]{a} = 1 + \delta_n$, to zauważmy, że $\delta_n > 0$ i podnosząc stronami do potęgi n otrzymamy $a = 1^n + n\delta_n + \cdots + \delta_n^n \geqslant n\delta_n$, stąd $0 < \delta_n \leqslant \frac{a}{n} \to 0$, co dowodzi (i). (Tu mogliśmy też skorzystać z nierówności Bernoulli'ego). Dowód (ii) przeprowadzimy jedynie dla $h_n > 0, h_n \to 0$ i dla $a > 1$ (bo $a^{-h_n} \to 1 \Rightarrow a^{h_n} \to 1$). Ustalmy $\epsilon > 0$. Ciąg $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ zmierza do 1, więc dla pewnego k jest $1 < a^{\frac{1}{k}} < 1 + \epsilon$. Z własności ciągu (h_n) wynika, że dla n dostatecznie dużych (powiedzmy, dla $n > n_0$) mamy $0 < h_n < \frac{1}{k}$, zaś z monotoniczności funkcji wykładniczej, $1 = a^0 < a^{h_n} < a^{\frac{1}{k}} < 1 + \epsilon$ -też dla $n > n_0$, co dowodzi (ii). Ciągłość wynika teraz z równości (3.3) stosowanej dla $r = x, s = h_n$, gdy $x \in \mathbb{R}$, $h_n \to 0$. Faktycznie, $a^{x+h_n} - a^x = a^x(a^{h_n} - 1)$, a wyrażenie w ostatnim nawiasie zmierza do zera przy $n \to \infty$, dzięki (ii). Aby wykazać ostatnią tezę wystarczy sprawdzić, czy dla każdego $y > 0$ istnieje

$x \in \mathbb{R}$ takie, że $a^x = y$. Ustalmy więc $y > 0$. Ograniczmy się do przypadku $a > 1$. Zapiszmy $a = 1 + d$, gdzie $d > 0$. Ponieważ $a^n = (1 + d)^n \geqslant 1 + nd$, ta wartość jest $> y$ dla n dostatecznie dużych (powiedzmy, dla $n = M$). Z kolei, $a^{-k} < y$ dla pewnych k (gdy $a^k > \frac{1}{y}$. Z twierdzenia Bolzano-Cauchy'ego wynika istnienie $x \in [-M, k]$ dla którego $a^x = y$. □

Mamy więc dla $a > 0, a \neq 1$ możliwość utworzenia funkcji odwrotnej do wykładniczej. Nazywamy ją **logarytmem przy podstawie** a i oznaczamy $\log_a$ w zapisie bezargumentowym. Dziedziną jest $(0, +\infty)$ Tak więc

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y.$$

Nie będziemy używali logarytmów dziesiętnych, zapis

$$\log, \quad \texttt{jak również zapis} \quad \ln$$

będzie oznaczał logarytm naturalny, czyli logarytm przy podstawie e, gdzie $e := \lim(1 + \frac{1}{n})^n \simeq 2,718281828459$. Rola tej stałej e jest szczególna: jest to jedyna stała a, dla której pochodna z funkcji (definicja będzie wkrótce) jest równa tej samej funkcji. Zamiast e^x piszemy też $\exp(x)$, co pozwala w zapisie bezargumentowym mówić o funkcji wykładniczej exp. Funkcja odwrotna do rosnącej jest rosnąca -dotyczy to zarówno a^x, jak i $\log_a y$ w przypadku $a > 1$. Gdy $t_n > 0$ oraz $\lim t_n = 0$, $a > 1$, to $\log_a(t_n) \to -\infty$. Gdy zaś $0 < b < 1$, to $\log_b(t_n) \to +\infty$ Z równości (3.3) wynika poniższy wzór (3.6). Jest to podstawowa własność logarytmów, którą zastosowano m. inn. przy konstrukcji suwaków logarytmicznych. Przed erą kalulatorów elektronicznych były one podstawowym narzędziem wspomagającym inżynierów przy obliczeniach.

Twierdzenie 3. Dla $a, b \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, $s, t > 0$ funkcja $\log_a$ ma następujące własności:

$$\log_a a = 1, \;\; \log_a 1 = 0, \tag{3.5}$$

$$\log_a(st) = \log_a(s) + \log_a(t), \qquad \log_a(\frac{1}{t}) = -\log_a(t), \tag{3.6}$$

$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c \tag{3.7}$$

Uzasadnienie tych wzorów, to przeliczenia, które zrobimy na wykladzie, lub na ćwiczeniach.

Jednym z zastosowań logarytmów, przydatnym zwłaszcza przy liczeniu pochodnych, lub przy arytmetyce granic. jest przekształcanie złożenia, w którym zarówno podstawa, jak i wykładnik są funkcjami- do postaci, w kórej podstawa jest stała: Zakładamy, że $f(t) > 0$ dla $t \in [a, b]$. Wtedy $f(t)^{g(t)} = \exp(g(t) \cdot \ln(f(t)))$.

10 Granice ciągów -cd

Powracając do granic ciągów, wykażemy parę ich podstawowych własności -w większości znanych Państwu ze szkoły średniej, zebranych w dwie większe kolekcje tez. Pierwsza kolekcja zakłada istnienie granicy jednego ciągu. Potrzebna nam będzie tez tzw.*druga nierówność trójkąta*: $||u| - |w|| \leqslant |u - w|$.

Twierdzenie 4. Załóżmy, że ciąg (a_n) jest zbieżny: $a_n \to a$.

1. Jeśli ponadto $a_n \to g$, to $a = g$ (jednoznaczność granic).
2. Jeśli $a < x$, to również $a_n < x$ dla dostatecznie dużych n.
3. $a_n \to a \Rightarrow [(-a_n) \to -a$ oraz $|a_n| \to |a|$
4. Ciąg zbieżny jest zawsze ograniczony: $\sup\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$.

5. Jeśli $\alpha_n = a_n$ dla dostatecznie dużych n, to również $\alpha_n \to a$.

Szkic dowodu: W tezie 1, którą wykażemy po tezach 2.,3. celowo nie używam zapisu $g = \lim a_n, a = \lim a_n$, bo dzięki przechodniości relacji $=$ zapis ten sugeruje już prawdziwość dopiero dowodzonej tezy. Tezę 2. wykazaliśmy na poprzednim wykładzie (tuż przed wypowiedzią Twierdzenia 1.) Mnożąc stronami (zachodzące od pewnego miejsca, np. dla $n > M = M_\epsilon$ przy ustalonym $\epsilon > 0$) nierówności

$$\forall_{n>M}\ a - \epsilon < a_n < a + \epsilon \tag{3.8}$$

przez -1 otrzymujemy pierwszą część tezy 3. Druga część wynika łatwo z *drugiej nierówności trójkąta*. Stosując tezę 3 do 2. -otrzymamy odpowiednik 2. dla przeciwnych nierówności. Dowodząc 1. metodą nie wprost możemy, bez straty ogólności, przyjąć, że $a < g$. Gdyby taka nierówność zachodziła, to np. dla $x = \frac{a+g}{2}$ mielibyśmy $a < x < g$. Teraz stosując 2. do pierwszej nierówności znajdziemy liczbę K taką, że dla $n > K$ jest $a_n < x$. Podobnie, dla drugiej nierówności -stnieje L takie, że dla $n > L$ jest $x < a_n$. Dla $n > \max K, L$ obydwie nierówności: $a_n < x$ oraz $x < a_n$ zachodzą, co daje sprzeczność: $a_n < a_n$, kończącą dowód tezy 1. metodą nie wprost. Teza 4. wynika z nierówności $a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$ zachodzących dla $n > M_\epsilon$. Stąd $\forall_n\, |a_n| \leqslant \max\{|a|+\epsilon, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{M_\epsilon}|\}$. Ostatnia teza wynika stąd, że gdy $a_n = \alpha_n$ dla $n > K$, zaś M jest dobrane do ϵ w warunku (3.8), to dla $n > \max\{K, M\}$ możemy zamienić a_n na α_n w nierównościach (3.8), co da zbieżność $\alpha_n \to a$.

Dalsze tezy zachodzą dla pary dwu ciągów zbieżnych i nazywane są *"arytmetyką granic"*.

Twierdzenie 5. Załóżmy, że ciągi (a_n) oraz $(b_n$ są zbieżne oraz $a = \lim a_n$, zaś $b = \lim b_n$. Wówczas

1. $a_n + b_n \to a + b$.
2. $a_n b_n \to ab$
3. Jeśli ponadto $b \neq 0, b_n \neq 0$, to $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$.
4. Jeśli ponadto $a_n > 0, a > 0$ (tym razem tylko zakładamy, że granica $b = \lim b_n$ jest skończona), to $\lim a_n^{b_n} = a^b$.

Szkic dowodu: Dla dowolnie ustalonego $\epsilon > 0$ dobieramy M, K na tyle duże, by dla $n > M$ było $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$, zaś dla $n > K$ było $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$. Wtedy dla $n > \max\{M, K\}$ obydwie nierówności zachodzą równocześnie i z nierówności trójkąta otrzymamy

$$|a_n + b_n - (a + b)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}.$$

To kończy dowód 1. Dla iloczynu korzystamy z ograniczoności ciągów zbieżnych -np. istnieje liczba $A > 0$ taka, że $\forall_n |a_n| \leqslant A$. Dodajac i odejmując "sztucznie" tę samą liczbę $a_n b$ możemy dokonać przekształcenia:

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leqslant |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a|$$

Ostatnia nierówność wynika z nierówności trójkąta i z faktu, że moduł iloczynu jest równy iloczynowi modułów. Wykorzystując oszacowanie $|a_n|$ przez A możemy prawą stronę ostatniej nierówności oszacować z góry przez $A|b_n - b| + |b||a_n - a|$. Teraz wystarczy (przechodząc do maksimum, jak w dowodzie 1.) wykorzystać nierówności: $|b_n - b|\frac{\epsilon}{2A}$ oraz $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2|b|+1}$ prawdziwe dla n dostatecznie dużych. Dla takich n będzie $|a_n b_n - ab| < A\frac{\epsilon}{2A} + |b|\frac{\epsilon}{2|b|+1} < \epsilon$, co dowodzi tezy 2.

Zapisując $\frac{a_n}{b_n}$ jako iloczyn $a_n \cdot \frac{1}{b_n}$ i wykorzystując tezę 2. możemy ograniczyć dowód 3. do przypadku, gdy $a_n = 1$. Wtedy z nierówności $|b| > 0$ - a właściwie, z ostrej nierówności $|b| > \delta > 0$, gdzie np. $\delta = \frac{|b|}{2}$ oraz z drugiej z tez 3. poprzedniego twierdzenia, mamy $|b_n| > \delta$ dla dostatecznie dużych n. Teraz $|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}| = \frac{|b-b_n|}{|b_n b|} \leqslant \frac{1}{|b|\delta}|b - b_n| < \epsilon$, o ile $|b - b_n|$ będzie dostatecznie małe -a to wynika (dla dostatcznie dużych n -ze zbieżności ciągu (b_n) do b. Dowód ostatniej tezy wynika ze wspomnianego stronę wcześniej przekształcenia, z ciągłości funkcji: logarytm oraz exp i z tezy 2.

Zauważmy, że tezy 4. nie można stosować, gdy $a_n = 1 + \frac{1}{n}$, $b_n = n$, bo $b_n \to \infty$.
— **Definicja.** Ciąg (b_n) jest rozbieżny do $+\infty$, czyli $\lim b_n = +\infty$, gdy

$$\forall_C \exists_M \forall_{n>M}\ b_n > C.$$

Zamiana w ostatnim warunku nierówności " $>$" na "$<$": czyli warunek $b_n < C$ da definicję, kiedy: "$\lim b_n = -\infty$".