11 Granice niewłaściwe, oś rozszerzona $\bar{\mathbb{R}}$

Arytmetyka granic jest wygodna, ale dla granic równych $\pm\infty$ nie zawsze można ją stosować- gdy mamy tak zwane *symbole nieoznaczone*. Pewne działania można wykonywać w zbiorze $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, który nazywamy osią rozszerzoną i oznaczamy symbolem $\bar{\mathbb{R}}$ lub $[-\infty;+\infty]$. Najpierw zdefinijemy relację nierówności: $\forall a\in\bar{\mathbb{R}}$ jest $-\infty\leqslant a\leqslant+\infty$. Dla $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ definicja $\alpha\leqslant\beta$ pokrywa się ze zwykłą nierównością w $\mathbb{R}$. Poza zwykłymi działaniami w $\mathbb{R}$ możemy zdefiniować dodawanie dla par $(a;+\infty)$-gdzie $a\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}=(-\infty,+\infty]$ -wynikiem będzie $+\infty$ -oraz dla $(a;-\infty)$, gdzie $a\neq+\infty$. Ponadto definiujemy wersje działań wynikłe z przemienności -na przykład $+\infty+a=+\infty$ dla $a\neq-\infty$. Podobnie definiujemy (przemiene) mnożenie na osi rozszerzonej dla par $(a;\pm\infty)$, gdzie $a\neq 0$ przyjmujemy, że $a\cdot(-\infty)$ jest równe $+\infty$, gdy $a\in[-\infty,0)$ oraz równe $-\infty$ dla $a>0$ -czyli dla $a\in(0,+\infty)$. Mnożenie przez $+\infty$ liczb $a\neq 0$ zachowuje się analogicznie: wynikiem jest $+\infty$ gdy $a>0$ oraz $-\infty$ dla $a<0$. Można też zdefiniować dzielenie dowolnej liczby $a\in\mathbb{R}$ przez $\pm\infty$ -wynikiem będzie zero.

Symbole nieoznaczone -dla których nie definiujemy żadnego wyniku, to: $(-\infty)+(+\infty)$, $(+\infty)+(-\infty)$ -oznaczane krócej jako $\infty-\infty$, $0\cdot\pm\infty$, $\infty\cdot 0$, $\frac{\infty}{\infty}$ (dla każdego ze znaków $\pm$) oraz $\frac{0}{0}$.

Przypomnijmy definicje granic niewłaściwych dla ciągów:

$$\lim x_n=+\infty \quad \texttt{jeżeli} \quad \forall_{C\in\mathbb{R}}\exists_M\forall_{n>M}\ x_n>C. \tag{4.1}$$

$$\lim y_n=-\infty \quad \texttt{jeżeli} \quad \forall_{C\in\mathbb{R}}\exists_K\forall_{n>K}\ y_n<C. \tag{4.2}$$

Twierdzenie 1. Załóżmy, że $\lim a_n=\alpha\in\bar{\mathbb{R}}$ oraz $\lim b_n=\beta\in\bar{\mathbb{R}}$. Wówczas o ile $\alpha+\beta$ **nie jest symbolem nieoznaczonym**, to istnieje w $\bar{\mathbb{R}}$ granica ciągu (a_n+b_n) równa $\alpha+\beta$. Analogiczna teza zachodzi dla iloczynu -gdy $\alpha\cdot\beta$ nie jest symbolem neioznaczonym (i analogicznie będzie dla ilorazu). Ponadto gdy $x_n\to 0$ oraz $x_n>0$ dla dostatecznie dużych n, to $\lim\frac{1}{x_n}=+\infty$

Dowód przeprowadzimy w przypadku dodawania tylko dla założeń: $\alpha=+\infty,\beta\in\mathbb{R}$. Mamy wtedy sprawdzić, czy dla $x_n:=a_n+b_n$ jest $\lim x_n=+\infty$. Ustalmy dowolne C. Dla $\epsilon=1$ w warunku zbieżności $b_n\to\beta$ znajdziemy takie n_1, że dla wszystkich $n>n_1$ jest $\beta-1<b_n<\beta+1$. Ze zbieżności $a_n\to+\infty$ istnieje takie n_0, że dla $n>n_0$ mamy $a_n>C-\beta+1$ Dla $n>\max(n_0,n_1)$ możemy wykorzystać obydwie nierówności, a dodając je stronami otrzymamy dla takich n nierówności $a_n+b_n>\beta-1+(C-\beta+1)=C$.

W przypadku mnożenia -niech np. $\alpha\in(-\infty,0),\beta=+\infty$. Sprawdzimy, że dla $y_n:=a_n\cdot b_n$ jest $y_n\to-\infty$. Ustalmy $C\in\mathbb{R}$. Weźmy liczbę a taką, by $\alpha<a<0$. Wówczas $\exists_p\forall_{n>p}a_n<a$. W warunku (4.2) można dodatkowo założyć, że $C<0$. Wówczas dla M zdefiniowanego jako $M=\frac{C}{a}$ mamy $b_n>M>0$, dla n dostatecznie dużych, powiedzmy dla $n>r$. Ponieważ $a<0$, mamy $a_nb_n<ab_n<aM=C$ dla $n>\max(r,p)\,\square$.

Jak łatwo zauważyć, odpowiednikiem twierdzenia o 3 ciągach będzie następujące

Twierdzenie 2. (o dwu ciągach) . Jeżeli $x_n\leqslant z_n$ dla dostatecznie dużych n oraz $\lim x_n=+\infty$, to również $z_n\to+\infty$. Gdy $b_n\leqslant y_n$ dla dostatecznie dużych n oraz $y_n\to-\infty$, to również $b_n\to-\infty$.

Przykłady

[**1.**] Dla $|a|<1$ jest $\lim a^n=0$, zaś dla $b>1$ mamy $b^n\to+\infty$.

Zacznijmy od $b=\frac{1}{|a|}$. Każdą liczbę $b>1$ możemy zapisać jako $b=1+\delta$, gdzie $\delta>0$. Teraz wykorzystując Nierówność Bernoulli'ego widzimy, że $(1+\delta)^n\geqslant 1+n\delta\geqslant$

$n\delta$. Ostatni wyraz będzie $> C$ dla $n > \frac{C}{\delta}$. Natomiast $a^n = \frac{1}{b^n} \to 0$, bo gdy ustalimy $\epsilon > 0$, to $-\epsilon < a^n < \epsilon$ gdy a^{-n}, czyli b^n będzie $> C := \frac{1}{\epsilon}$. Tu mamy arytmetykę granic dla symbolu $\frac{1}{\infty} = 0$.

[2.] Wykażemy, że $\sqrt[n]{n} \to 1$ przy $n \to \infty$, zaś $\frac{\ln n}{n} \to 0$.

Podobnie, jak poprzednio dla $\sqrt[n]{a}$, możemy zapisać $\sqrt[n]{n} = 1 + \delta_n$ dla pewnego ciągu liczb $\delta_n > 0$. Podnosząc stronami do potęgi n i uwzględniając jedynie trzeci składnik Dwumianu Newtona, (pozostałe są > 0) otrzymamy

$$n = (1 + \delta_n)^n \geqslant \frac{n(n-1)}{2}\delta_n^2. \tag{4.3}$$

dzieląc stronami przez n mamy stąd $2 \geqslant (n-1)\delta_n^2$, więc $0 < \delta_n \leqslant \frac{2}{\sqrt{n-1}} \to 0$. Wynika stąd pierwsza teza, drugą otrzymamy z pierwszej stosując logarytm (i jego ciągłość), bo $\ln(\sqrt[n]{n}) = \frac{1}{n}\ln n$.

[3.] Gdy $\lim x_n = +\infty$, zaś $\alpha > 0$, to $\lim (x_n)^\alpha = +\infty$.

Istnieje $m \in \mathbb{N}$ takie, że $\frac{1}{k} \leqslant \alpha$, to $\sqrt[k]{x_n} \leqslant (x_n)^\alpha$ dla n na tyle dużych, by $x_n > 1$, co wynika z definicji potęgi o wykladniku niewymiernym jako kresu górnego z potęg o wykładnikach wymiernych mniejszych od α. Jeśli skorzystamy z twierdzenia o dwu ciągach, to wystarczy sprawdzić, że $\sqrt[k]{x_n} \to +\infty$. Dla dowolnie zadanego C wystarczy, by $x_n > C^k$ od pewnego miejsca, a to zachodzi, bo $x_n \to +\infty$.

[4.]"Wzrost wykładniczy a wzrost potęgowy" Gdy $\alpha > 0$ oraz $b > 1$, to

$$\lim \frac{b^n}{n^\alpha} = +\infty.$$

Dla $\beta := b^{\frac{1}{\alpha}}$ mamy $\frac{b^n}{n^\alpha} = \left(\frac{\beta^n}{n}\right)^\alpha$, więc dzięki [3] wystarczy sprawdzić tezę dla $\alpha = 1$, po zastąpieniu b przez β (które też jest > 1, więc postaci $(1+\delta)$). Wtedy teza wyniknie z nierówności analogicznej do tej występującej we wzorze (4.3)

Ostatnią granicę można też znaleźć korzystając z pierwszego z następujących twierdzeń. (Można go stosować też do granic typu $\lim \frac{b^n}{n!}$

Twierdzenie 3. Jeżli dla ciągu (a_n) o wyrazach dodatnich istnieje granica $q = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$, to w przypadku, gdy $q < 1$ mamy $\lim a_n = 0$, zaś gdy $q > 1$, to $\lim a_n = +\infty$.

Dowód. Gdy $q < r < 1$ (takie r istnieje), to dla pewnego M i dla wszystkich $n \geqslant M, n \in \mathbb{N}$ będzie $\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$. W szczególności, $a_{M+1} \leqslant r a_M$,

$$a_{M+2} \leqslant r a_{M+1} \leqslant r^2 a_M, \ldots, \quad a_{M+k} \leqslant r^k a_M.$$

Ostatnią nierówność możemy łatwo sprawdzić metodą indukcji względem k. Teraz pierwsza teza wynika z twierdzenai o 3 ciągach. Druga wynika z pierwszej stosowanej do ciągu $\frac{1}{a_n}$ i z ostatniej tezy twierdzenia 1.

Twierdzenie 4. (O.Stolza) Gdy ciąg o wyrazach $y_n > 0$ jest silnie rosnący oraz $\lim y_n = +\infty$, to z istnienia granicy $g = \lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$ wynika, że również $\lim \frac{x_n}{y_n} = g$.

Tu dowód pominiemy. Warto zauważyć, że wynikają stąd nastpujące wnioski:

(Wn1.) Gdy istnieje granica skończona $\lim a_n = A$, to ciąg średnich arytmetycznych $A_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ również zmierza do granicy równej A.

(Wn 2.) Dla każdej liczby naturalnej k mamy

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1^k + 2^k + \ldots n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}.$$

12 Podciągi

Czasami rozważamy ciąg utworzony tylko z pewnych wybranych wyrazów danego ciągu o wyrazach $x_n \in \mathbb{R}$. Na przykład, biorąc tylko nieparzyste numery wyrazów x_{2n+1} otrzymamy już inny ciąg, zbiór jego wyrazów będzie na ogół mniejszy. Ale czy zbieżność ciągu się utrzyma, bądź zmieni? To zależy od sposobu w jaki wybieramy takie numery wskaźników.

Definicja. Ciąg o wyrazach $z_k := x_{n_k}$, gdzie $\forall_{k\in\mathbb{N}} n_k \in \mathbb{N}$ nazywamy **podciągiem** ciągu (x_n), jeżeli ciąg liczb naturalnych n_k jest silnie rosnący, czyli gdy $\forall_k n_k < n_{k+1}$. Jeśli jakaś liczba jest granicą pewnego podciągu danego ciągu (x_n), to nazywamy ją **punktem skupienia ciągu** (x_n).

Oczywiście, musi wtedy być $\lim n_k = +\infty$ oraz $n_k \geqslant k$. Podciąg w ciągu niemającym granicy (czyli rozbieżnym) może być zbieżny -na przykład wyrazy nieparzyste ciągu rozbieżnego $(-1)^n$ tworzą ciąg stały, równy -1 i taka też jest jego granica. Zbiorem punktów skupienia dla ciągu $(-1)^n$ jest zbiór 2-elementowy $\{-1, 1\}$ Można wykazać, że $\forall_{t\in[-1.1]}$ ciąg o wyrazach $\sin n$ ma podciąg zbieżny do t. Tym razem zbiór punktów skupienia, to cały odcinek domknięty $[-1, 1]$. Najważniejszy dla nas będzie jednak następujący fakt:

Twierdzenie. Podciąg (x_{n_k}) w ciągu zbieżnym jest również zbieżny - i to do tej samej granicy.

Dowód poza definicjami wykorzystuje jedynie nierówności $n_k \geqslant k$. Możecie Państwo spróbować i przekonacie sie, że to nie jest trudne. Zbiór punktów skupienia ma w przypadku ciągów zbieżnych tylko 1 element, równy granicy danego ciągu. Sprawdźmy np. jak wygląda zbiór punktów skupienia dla ciagu o wyrazach $x_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n$. Mamy $x_{2n} = (1 + \frac{1}{2n})^{2n}$, który jest podciągiem ciągu zbieżnego do liczby e. Dla wyrazów nieparzystych otrzymamy z kolei podciąg (ze znakiem różnicy w nawiasie) ciągu $y_n = (1 - \frac{1}{n})^n = (\frac{n-1}{n})^n$. Dla $n > 1$ wyliczamy $\frac{1}{y_n} = (\frac{n}{n-1})^n = (1 + \frac{1}{n-1})^{n-1} \cdot \frac{n}{n-1}$ Drugi z czynników zmierza do 1, zaś pierwszy (począwszy od $n = 2$) jest podciągiem w ciągu zmierzającym do liczby e. Stosując arytmetykę granic do ciągu $\frac{1}{y_n}$ wnioskujemy, że $\lim y_n = \frac{1}{e}$. Mamy więc (na razie tylo wiemy, że przynajmniej) dwa punkty skupienia: e^{-1}, e. Można wykazać, że innych punktów tu nie ma. Faktycznie, gdyby jakiś podciąg x_{n_k} miał granicę g, to albo wśród liczb n_k będzie nieskończenie wiele liczb parzystych -ustawiając je w porządku rosnącym otrzymamy podciąg ciągu (x_{n_k}) - więc też zbieżny do g. Ale równocześniebędzieto podciąg w ciągu x_{2n} -czyli zbieżny do e. Stąd wtedy $g = e$. W przypadku, gdyby nieskończenie wiele spośród n_k stanowiły liczby nieparzyste, to z podobnych względów będzie $g = \frac{1}{e}$.

Jak widać, aby wykazać rozbieżność ciągu wystarczy znaleźć jakieś dwa jego podciągi mające różne granice. Gdy ciąg ma tylko jeden punkt skupienia, tojeszcze ie musi być zbieżny. Przykładem będzie ciąg 2^{c_n}, gdzie $c_n = (-1)^n n$, którego jedybym punktem skupienia w $\mathbb{R}$ jest zero. Tym niemniej, dla ciągów ograniczonych jeśli istnieje tylko jeden punkt skupienia, to jest on już granicą. Ma to związek z następującym, **bardzo ważnym** rezultatem

Twierdzenie. (Bolzano-Weierstrassa) Każdy ciąg ograniczony zawiera jakiś podciąg zbieżny.

Dowód polega na dzieleniu odcinka na połowę, tej połowy na dalsze połówki itd. Ograniczoność ciągu (x_n) oznacza, że wszystkie wyrazy ciągu zawierają się w jakimś odcinku $[a_1, b_1]$. Wybieramy taką połówkę $[a_2, b_2]$, w której znajduje się nieskończenie wiele wyrazów ciągu i spośród nich wybieramy x_{n_2}. I tak dalej. Mając już przedział $[a_k, b_k]$ oraz $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$, wybierzmy taką jego połówkę, nazywając ją $[a_{k+1}, b_{k+1}]$, w której jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu. Wśród nich znajdziemy taki wyraz $x_{n_{k+1}}$, by było $n_{k+1} > n_k$. Podobnie, jak w dowodzie twierdzenia Bolzano-Cauchy'ego (Tw.5 z wykładu 2.), istnieje wspólna granica (powiedzmy, równa g) ciągów $(a_k), (b_k)$. Ponieważ $a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k$, mamy również

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = g.$$

Ciekawym typem granic są granice ciągów zadanych wzorem rekurencyjnym. Na przykład, dla pewnej funkcji (ciągłej) $f(x)$ mamy zadaną wartość x_1 oraz wzór typu $x_{n+1} = f(x_n)$. Jeśli granica $\gamma = \lim x_n$ istnieje, to $f(\gamma) = \lim f(x_n)$, dzięki ciągłości f. (często f dana jest prostym wzorem algebraicznym i ten fakt wynika wprost z arytmetyki granic). Ale ciąg o wyrazach $f(x_n) = x_{n+1}$ jest odciągiem ciągu (x_n)- więc też ma granicę równą g Wynika stąd równanie: $\gamma = f(\gamma)$, które ma czasami 2 różne pierwiastki, ale jeden z nich wykluczają nierówności, jakie spełniają wyrazy x_n. Cała trudność polega tu na wykazaniu istnienia takiej granicy, czyli zbieżności. Co ciekawe, na ogół te granice wychodzą takie same bez względu na początkową wartość x_1, o ile nie ma to wpływu na nierównosci wykluczające jedno z rozwiązań równania $\gamma = f(\gamma)$. Na przyklad, niech dla dowolnie ustalonej wartości $x_1 > 0$ będzie $x_{n+1} = \frac{1}{2}\big(x_n + \frac{1}{x_n}\big)$. Jak wiemy z wykladu 3., śerdnia arytmeryczna jest $\geqslant$ od geometrycznej -równej 1 dla liczb x_n oraz $\frac{1}{x_n}$. Stąd dla $n > 1$ mamy $x_n \geqslant 1$. Równanie $2\gamma = \gamma + \frac{1}{\gamma}$, czyli $\gamma = \frac{1}{\gamma}$ ma 2 rozwiązania, ± 1, ale ponieważ $\gamma \geqslant 1$, ujemne rozwiązanie odrzucamy. Granica, o ile istnieje, będzie równa 1. Ciąg - jeśli jest monotoniczny (od $n = 2$ począwszy), powinien więc maleć, gdy $x_1 \neq 1$. Ponieważ już wiemy, że $x_n \geqslant 1$ dla $n \geqslant 2$, wystarczy sprawdzić, że faktycznie ten ciąg maleje. Czy zachodzi więc dla $n \geqslant 2$ nierówność:

$$\frac{1}{2}(x_n + \frac{1}{x_n}) \leqslant x_n?$$

Ale mnożąc jej strony przez 2, następnie odejmując od każdej ze stron x_n otrzymujemy jej równoważną potać: $\frac{1}{x_n} \leqslant x_n$, ktora dla $x_n \geqslant 1$ jest oczywista. Wynika stąd, że $\lim x_n = 1$.

Podobne metody stosujemy do ciągu , w którym

$$a_1 = \sqrt{2}, a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \ldots, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}.$$

Wyrazy są tu nieujemne, ciąg jest niemalejący, jako ograniczenie z góry (o ile istnieje), będzie można wstawić granicę: $g = \lim a_n$. Równanie $g = \sqrt{2+g}$ daje $g^2 - g - 2 = 0$, $g = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{9}) = 2$ lub -1, ale ze wzgledu na nieujemność, nie może być $g = -1$. Stąd -o ile istnieje, to $g = 2$. Dowodzimy, że $a_n \leqslant 2$. Jest tak dla a_1.

Zakładając, ze nierówność zachodzi dla n, sprawzamy, czy zachodzi dla $n+1$, czyli, czy $\sqrt{2 + a_n} \leqslant 2$, co jest tu równoważne temu, że $2 + a_n \leqslant 4$, czyli $a_n \leqslant 2$ -ale to właŚnie zakładamy. Pozdumowując, mamy $\lim a_n = 2$.

Jest jeszcze inny sposób sprawdzania, czy ciąg jest zbieżny -ma on dwie zalety: nie wymaga monotoniczności ciągu ani znajomości wartości jego granicy. Szczególnie przydatny będzie do badania zbieżności szeregów liczbowych.

Definicja. Mówimy, ze ciąg o wyrazach $x_n \in \mathbb{R}$ **spełnia warunek Cauchy'ego**, lub "**jest ciągiem Cauchy'ego**" , jeżeli

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_M\forall_{n,k\geqslant M}|x_n - x_k| < \epsilon. \tag{4.4}$$

Z nierówności trójkąta i z definicji granicy dość łatwo wynika, że ciągi zbieżne zawsze spełniają warunek Cauchy'ego. Faktycznie, mając zadane $\epsilon > 0$ dobieramy tak duże M, by dla $n > M$ było $|x_n - g| < \frac{\epsilon}{2}$. Gdy również $k > M$, to

$$|x_n - x_k| = |x_n - g + g - x_k| \leqslant |x_n - g| + |x_k - g| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Twierdzenie. Ciąg liczbowy jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek Cauchy'ego Dowodzi się, że każdy ciag Cauchy'ego jest ograniczony (dobieramy M_1 w (4.4) do wartości $\epsilon = 1$ i dla $n > M$ wnioskujemy z (4.4), że $|x_n| \leqslant |x_M| + 1$, a pozostałą (skończoną, =M) ilość wyrazów szacujemy przez maksimum ich modułów. Następnie Tw. Bolzano-Weierstrassa implikuje istnienie podciągu (x_{n_k}) zbieżnego. Jeśli $g = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$, to wykazujemy, że cały ciąg (x_n) zmierza do g, przy tym korzystamy z (4.4) z M dobranym do $\frac{\epsilon}{2}$. Z definicji granicy, istnieje K_0 takie,że $\forall_{k>K_0}|x_{n_k} - g| < \frac{\epsilon}{2}$. Wówczas dla $n > M, k > \max(K_0, M)$ mamy

$$|x_n - g| \leqslant |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - g| \leqslant \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}. \qquad \square$$