13 Granice

Prawie zakończyliśmy badanie granic ciągów. Jeszcze parę przykładów i uwag, które mogą się przydać.

(1) Zastosujemy twierdzenie o trzech ciągach i wiedzę granicach typu $\sqrt[n]{n}$ do wyliczania bardziej skomplikowanych granic.

Przykład Granicą ciągu $\sqrt[2n]{3^n + n^3 + \log n + 2^{2n+5}}$ jest 2. Na wykładzie sprawdzimy, że nie jest to zadanie aż takie trudne, na jakie wygląda.

Wykażemy też ogólny fakt dla ciągów o wyrazach dodatnich: $x_n > 0$.

Twierdzenie. Jeśli istnieje granica $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = g$, to również $\lim \sqrt[n]{x_n} = g$.

Pozwoli to na wyliczenie dość trudnych granic, np. zawierających $\sqrt[n]{n!}$. Najpierw sprawdźmy, skąd wynika nasza teza: Ustalmy dowolne $\epsilon > 0$ Wówczas od pewnego miejsca począwszy, np. dla $n \geqslant N$ będzie $g - \epsilon < \frac{x_{n+1}}{x_n} < g + \epsilon := r$. Dla zakończenia dowodu wystarczy wykazać n.p., ze od pewnego (możliwe, że innego) miejsca począwszy, mamy $g - 2\epsilon < \sqrt[n]{x_n} < g + 2\epsilon$.

Podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 3. z poprzedniego wykładu, gdzie zamiast g mieliśmy q, a zamist $g + \epsilon$ -było r, otrzymamy dla $k \in \mathbb{N}$

$$x_{N+k} < r^k x_N, \quad \texttt{czyli} \quad \forall_{m=N+k>N} \quad x_m < r^{m-N} x_N.$$

Stąd dla $m > N$ będzie $\sqrt[m]{x_m} < r \sqrt[m]{r^{-N} x_N}$. Zauważmy, że N , a więc i wyrażenie pod pierwiastkiem po prawej stronie -jest tu stałe (tzn. nie zależy od m, tylko od ϵ). Ciąg znajdujący się po prawej stronie zmierza do r przy $m \to \infty$, więc będzie mniejszy od $r + \epsilon = g + 2\epsilon$ dla m dostatecznie dużych np. $m > M_1$. Takie więc będzie też oszacowanie z góry dla $\sqrt[m]{x_m}$ dla $m > \max(M, M_1)$. W podobny sposób możemy oszacować wyrazy $\sqrt[m]{x_m}$ od dołu przez liczbę dowolnie bliską g -tak będzie od pewnego miejsca. A to oznacza, że granica ciągu o wyrazach $\sqrt[n]{x_n}$ jest równa g. (Te oszacowania z dołu można bezposrednio wywnioskować z pierwszej części dowodu, stosując oszacowania z góry dla ciągów, w których x_n zamienimy przez $\frac{1}{x_n}$) $\square$.

Na przykład, gdy $a_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$, to dla $x_n = \frac{n!}{n^n}$ mamy $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = (1 - \frac{1}{n+1})^n$, co zmierza do e^{-1} przy $n \to \infty$.

Ciągi zbieżne (a_n) nie są na ogół monotoniczne, ale można z nimi związać parę ciągów monotonicznych, mających takie same granice, jak (a_n): Jeśli przez E_1 oznaczymy zbiór wyrazów tego ciągu, $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, to niech $E_k := \{a_n : n \geqslant k, n \in \mathbb{N}\}$ oznacza "zbiór wyrazów k-tej końcówki tego ciągu. Jest to malejący (="zstępujący") ciąg zbiorów, więc dla $t_k := \inf E_k = \inf\{a_k, a_{k+1}, \dots\}$ otrzymujęmy ciąg niemalejący, a dla $s_k := \sup E_k = \sup_{n \geqslant k} a_n$ -ciąg nierosnący. Można wykazać, że obydwa te ciągi mają wspólną grznicę równą $\lim a_n$, o ile ciag jest zbieżny. Ale w ogólniejszej sytuacji, gdy nie zakładamy istnienia $\lim a_n$, takie dwie granice -należące na ogół do osi rozszerzonej $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ nadal istnieją i nazywamy je: **granicą dolną ("*limes inferior*")** i odpowiednio: **granicą górną ("limes superior")**. Taki jest znaczenie spotykanych w tekstach matematycznych symboli:

$$\liminf a_n := \lim_k (\inf\{a_n : n \geqslant k\}) = \sup_k \inf_{n \geqslant k} a_n, \quad \limsup a_n := \lim_k \sup_{n \geqslant k} a_n = \inf_k \sup_{n \geqslant k} a_n.$$

Można też spotkać oznaczenia $\underline{\lim}_n a_n = \liminf a_n$ oraz $\overline{\lim}_n a_n = \limsup a_n$. Symbole te są dość przydatne, bo np. warunek "($a_n > \alpha$ dla nieskończenie wielu n)" wynika z nierówności $\limsup a_n > \alpha$, zaś z nierówności $\limsup a_n < \beta$ wynika, że $a_n > \beta$ "od pewnego miejsca począwszy". Ponadto $\limsup a_n = \liminf a_n = \gamma$ wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg jest zbieżny oraz $\gamma = \lim a_n$. Można też wykazać, że (dla ciągów ograniczonych) granice: dolna i górna są równe minimum (odpowiednio maksimum) ze zbioru punktów skupienia danego ciągu. Co więcej, $\limsup a_n = -\liminf(-a_n)$. Te uwagi mają charakter informacyjny -postaramy się nie używać tych pojęć w naszym kursie.

14 Granice funkcji w punkcie

14.1 Punkty skupienia zbioru

Ustalmy najpierw, w jakich punktach zbioru $D \subset \mathbb{R}$ można liczyć granicę dla funkcji $f : D \to \mathbb{R}$.
Definicja. Sąsiedztwem punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ o promieniu $r > 0$ nazwiemy zbiór

$$S(x_0; r) := \{y \in \mathbb{R} : 0 < |y - x_0| < r\}.$$

Mówimy, że x_0 jest punktem skupienia zbioru D, gdy każde jego sąsiedztwo zawiera przynajmniej jeden punkt zbioru D. [1]

UWAGI: Punkt skupienia nie musi należeć do zbioru. Na przykład, do zbioru E_1 wyrazów ciągu silnie monotonicznego zbieżnego nie należy jego granica, a to jest jedyny punkt skupienia zbioru E_1. Punkt $z_0 \in D$, który nie jest punktem skupienia zbioru D, nazywamy jego punktem izolowanym. Z kolei x_0 jest punktem skupienia zbioru D wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(5.1) \qquad \forall_{\delta>0} \exists_{y(\delta)\in D} \; 0 < |x_0 - y(\delta)| < \delta.$$

Faktycznie, $D \cap S(x_0; \delta) \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists_{y(\delta)\in D}\, y(\delta) \in S(x_0; \delta)$. Biorąc $x_1 \in D$ dowolne, a dla $n \in \mathbb{N}$ majac już wybrane $x_1, x_2, \ldots x_n \in D$ bierzemy $r_{n+1} < \min(\frac{1}{n}, |x_n - x_0|)$. Wówczas x_{n+1} dobrany jako y_{n+1} z warunku (5.1) dla $\delta = r_{n+1}$. Wynika stąd:

Wniosek. W każdym sąsiedztwie punktu x_0 skupienia zbioru D znajduje się nawet nieskończenie wiele elementów zbioru D, tworzących ciąg różnowartościowy (x_n) zbieżny do x_0.(Można nawet wybrać taki ciąg silnie monotoniczny).

Zbiory skończone nie mają więc żadnych punktów skupienia. Wcześniej wprowadziliśmy punkty skupienia ciągów, ale to jest `zupełnie inne pojęcie,` bo są to granice zbieżnych podciągów. Jednak jeśli te podciągi są od pewnego miejsca stałe, to zbiór wyrazów (tego podciągu) jest skończony i nie ma jako zbiór - żadnych punktów skupienia.

14.2 Granica funkcji

W tej definicji musimy założyć, że punkt x_0, w którym będziemy liczyli granicę funkcji **jest punktem skupienia jej dziedziny.**
Definicja. Liczbę $g \in \mathbb{R}$ nazwiemy granicą funkcji $f : D \to \mathbb{R}$ w punkcie skupienia x_0 zbioru D, co zapiszemy $f(x) \to g$ przy $x \to x_0$ lub symbolem

$$g = \lim_{x\to x_0} f(x), \quad \texttt{jeżeli}$$

$$(5.2) \qquad \forall_{\epsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_x \left(x \in D \wedge 0 < |x - x_0| < \delta\right) \Rightarrow |f(x) - g| < \epsilon.$$

Nierówność $0 < |x - x_0|$ oznacza dokładnie tyle, że $x \neq x_0$ i nie można z niej zrezygnować w tej definicji. Przykładem może być funkcja o dziedzinie $[0, 1]$ taka, że $f(t) = \lim_{n\to\infty} t^n$ -czyli równa 0 dla $t \in [0, 1)$ oraz $f(1) = 1$. Dla $x_0 = 1$ mamy $\lim_{t\to 1} f(t) = 0$ Warunek $|f(t) - 0| < \epsilon$ nie zachodzi dla $t = 1$ gdy $0 < \epsilon < 1$. Ale punkt $t = 1$ w myśl naszej definicji wykluczamy. Gdybyśmy go nie wykluczyli, nie istniała by żadna granica tej f w punkcie 1.

Jedynie dla np. funkcji spełniających warunek Lipschitza w otoczeniu punktu x_0 mamy[2] $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$ i tam wykluczenie możliwości $x = x_0$ nie powoduje problemu. (To odzwierciedli się w definicji funkcji ciągłej, którą wkrótce sformułujemy w "języku $\epsilon - \delta$", czyli warunkiem podobnym do (5.2).)

[1] Analogiczna będzie definicja sąsiedztw i punktów skupienia w której $\mathbb{R}$ zamienimy na $\mathbb{C}$ = zbiór liczb zespolonych (a nawet w $\mathbb{R}^n$ przy zastąpieniu modułu liczby przez długość wektora).

[2] Gdy istnieje stała $L > 0$ taha, że $|f(x) - f(x_0)| \leqslant L|x - x_0|$ dla $x \in D$, to warunek (5.2) zachodzi dla $g = f(x_0)$, bo dla $\epsilon > 0$ wystarczy dobrać $\delta = \frac{\epsilon}{L}$.

Gdyby nie zakładać, że x_0 jest punktem skupienia dziedziny, to poprzednik implikacji z warunku (5.2) dla pewnych $\delta > 0$ byłby fałszywy, a cała implikacja -prawdziwa, niezależnie od wartości g. Nie mielibyśmy jednoznaczności granicy!

Jeśli otoczeniem punktu g nazwiemy każdy zbiór zawierający dla pewnego $\epsilon > 0$ przedział $(g - \epsilon, g + \epsilon)$, to definicję granicy możemy sformułować tak:

`"Dla dowolnie zadanego otoczenia` V `granicy istnieje sąsiedztwo punktu` x_0`, którego obraz przez` f `zawiera się w zbiorze` V`".`

Taką formę definicji można uogólnić na wiele sytuacji - np. na przypadek granicy niewłaściwej $g = +\infty$, gdzie otoczeniem punktu $+\infty$ nazwiemy każdy zbiór zawierający półprostą $V_C(+\infty) := \{t \in \bar{\mathbb{R}} : C < t \leqslant +\infty\}$. Sąsiedztwem $+\infty$ nazwiemy zbiór $S_M(+\infty) := \{t \in \mathbb{R} : M < t\}$ i w analogiczny sposób możemy zdefiniować granice w punkcie niewłaściwym $+\infty$, czyli $\lim_{t\to+\infty} f(t)$, lub w $-\infty$. Na przykład $f(t) \to -\infty$ przy $t \to +\infty$, gdy $\forall_C \exists_M \forall_t (t \in S_M(+\infty) \Rightarrow f(t) \in V_C(-\infty))$, czyli $\forall_C \exists_M t > M \Rightarrow f(t) < C$.

Zapisując warunek $|f(x) - g| < \epsilon$ w równoważnej postaci $g - \epsilon < f(x) < g + \epsilon$ widzimy, że każdą liczbę $\alpha < g$ możemy zapisać w postaci $\alpha = g - \epsilon$, zaś liczbę $\beta > g$ w postaci $\beta = g + \epsilon$ z odpowiedniodobranymi wartościami $\epsilon > 0$. Wynika stąd (i z samej definicji granicy) bardzo ważny fakt:

Wniosek 1. Ostre nierówności między daną liczbą a granicą $g = \lim_{x\to x_0} f(x)$ zachowują się w pewnym sąsiedztwie punktu x_0. Np. gdy

$$\beta > g, \quad \texttt{to} \quad \exists_{\delta>0} \forall_{x\in D} 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < \beta.$$

Wniosek 2.(Twierdzenie o Jednoznaczności Granic) Jeżeli przy $x \to x_0$ mamy granice: $f(x) \to g_1$ oraz $f(x) \to g_2$, to $g_1 = g_2$.

Faktycznie, możemy przeprowadzić dowód metodą nie wprost i to jedynie w przypadku, gdy $g_1 < g_2$. Dla $\beta := \frac{g_1+g_2}{2}$ z nierównosci $\beta > g_1$ wynika istnienie liczby $\delta_1 > 0$ takiej, że gdy $0 < |x - x_0| < \delta_1, x \in D$ to $f(x) < \beta$. Podobnie, z nierówności $\beta < g_2$, dla pewnego $\delta_2 > 0$ będzie $\beta < f(x)$, o ile $0 < |x - x_0| < \delta_2, x \in D$. Ale ponieważ x_0 jest punktem skupienia zbioru D, dla $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$ znajdzie się takie $x_* \in D$, że $0 < |x_* - x_0| < \delta$ i wówczas obydwa warunki zachodzą równocześnie dla tego x_*, czyli $f(x_*) < \beta$ oraz $\beta < f(x_*)$, co daje sprzeczność, która kończy dowód nie wprost.

Następne twierdzenie podaje warunek równoważny definicji granicy, który pomoże w przeniesieniu wielu twierdzeń, które poznaliśmy dla granic ciągówna grunt granic funkcji.

Twierdzenie 1. Jeżli x_0 jest punktem skupienia dziedziny D funkcji $f : D \to \mathbb{R}$, to liczba $g \in \bar{\mathbb{R}}$ jest granicą f w tym punkcie, czyli $f(x) \to g$ przy $x \to x_0$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi następujący "warunek Heinego":

$$\text{(5.3)} \qquad \big[\, x_n \in D \setminus \{x_0\},\ \lim x_n = x_0 \big] \Rightarrow f(x_n) \to g \ \texttt{przy} \quad n \to \infty.$$

Warunek Heinego dość prosto wynika z warunku $g = \lim_{x\to x_0} f(x)$: Jeśli mamy zadane $\epsilon > 0$, to najpierw dobieramy $\delta > 0$, jak w (5.2), potem korzystając ze zbieżności $x_n \to x_0$ znajdujemy miejsce $M \in \mathbb{N}$, od którego począwszy (tzn. dla $n \geqslant M$) jest $|x_n - x_0| < \delta$. Ponieważ $\forall_n x_n \neq x_0$, do ostatniej nierówności możemy dopisać, że $0 < |x_n - x_0|$, wówczas poprzednik implikacji w (5.2) jest spełniony dla x_n w miejsce x, a zatem $|f(x_n) - g| < \epsilon$.

Dowód wynikania w przeciwną stronę jest o tyle trudniejszy, ze nie są znane metody inne, niż dowód nie wprost. Przypuśćmy więc, że zachodzi warunek (5.3) i nie zachodzi (5.2). Zaprzeczeniem (5.2) jest warunek:

$$\exists_{\epsilon_*>0} \forall_{\delta>0} \exists_{x(\delta)} \big(x(\delta) \in D, 0 < |x(\delta) - x_0| < \delta\big) \wedge |f(x(\delta)) - g| \geqslant \epsilon_*.$$

Zamiast dowolnych $\delta > 0$ wybierzmy $\delta = \frac{1}{n}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ i odpowiadające im liczby $x(\delta)$ oznaczmy jako x_n. Tak więc $x_n \in D \setminus \{x_0\}$, bo $0 < |x_n - x_0|$. A ponieważ $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$, mamy zbieżność $x_n \to x_0$. [3] Jednak z nierówności

[3]Gdyby wybierać zawsze x_{n+1} tak, by $0 < |x_{n+1} - x_0| < \min(\frac{1}{n}, |x_n - x_0|)$, to otrzymamy ciąg różnowartościowy. Wybierając w razie potrzeby jego dalszy podciąg, uzyskamy ciąg silnie monotoniczny.

$|f(x_n) - g| \geqslant \epsilon_*$ wynika, że nie może być zbieżności $f(x_n)$ do g i (5.3) nie zachodzi. Sprzeczność ta kończy dowód w przypadku granic skończonych. Dla granic niewłaściwych jest całkiem analogiczny z tym, że przy $x \to \infty$ zamiast $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ konstruujemy $x_n > n$, zamiast zaprzeczenia warunku $|f(x) - g| < \epsilon$ -zaprzeczamy warunkowi $f(x) \in V_C(g)$, jeśli $g = \pm\infty$. $\square$

14.3 Własności granic funkcji

Dzięki ostatniemu twierdzeniu widzimy, że własności granic ciągów poprzez warunek Heinego przechodzą w analogiczne własności granic funkcji. Na przykład, z Twierdzenia 5. (wykład 3.) oraz z jego wersji dla granic niewłaściwych (Tw.1 z wykładu 4.) wynika następujące

Twierdzenie. (Arytmetyka Granic) Jeśli istnieją (w $\bar{\mathbb{R}}$) granice $A = \lim_{x \to x_0} \alpha(x)$ oraz $B = \lim_{x \to x_0} \beta(x)$ i jeśli poniższe działania nie prowadzą do symboli nieoznaczonych, to

- $\lim_{x \to x_0} (\alpha(x) + \beta(x)) = A + B$;
- $\lim_{x \to x_0} (\alpha(x) \cdot \beta(x)) = A \cdot B$;
- $\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{A}{B}$;

Ponadto $\lim_{x \to x_0} |\alpha(x)| = |A|$; oraz gdy $A > 0$, $|B| < \infty$, to $\lim \alpha(x)^{\beta(x)} = A^B$.

Przypomnijmy, że symbole nieoznaczone, dla których nie da się jednoznacznie określić wspomnianych wyżej granic, to np.

$$+\infty - \infty, -\infty + \infty, 0 \cdot (\pm\infty), \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0^0, 1^\infty.$$

Twierdzenia o słabych nierównościach Jeżeli istnieją granice $A = \lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x)$ oraz $B = \lim\limits_{x \to x_0} \beta(x)$ i w pewnym sąsiedztwie $S = S(x_0, \delta)$ punktu x_0 jest $\alpha(x) \leqslant \beta(x)$, to $A \leqslant B$.
Jeśli ponadto $\forall_{x \in S}\, \alpha(x) \leqslant \gamma(x) \leqslant \beta(x)$ oraz $A = B$, to istnieje $\lim\limits_{x \to x_0} \gamma(x) = A$.

Przykład symbolu nieoznaczonego zawiera wzór

$$\lim_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$

Wykazaliśmy dla tego wzoru odpowiedni warunek Heinego (biorąc dowolny ciąg $x_n \to +\infty$ w pierwszym z twierdzeń na zeskanowanych notatkach odręcznych do wykładu 4. wykazaliśmy, że wówczas $\lim(1 + \frac{1}{x_n})^{x_n} = e$). Z kolei, dla funkcji wykładniczej sprawdziliśmy, że

$$\lim_{x \to x_0} \exp x = \exp(x_0).$$

14.4 Podstawowe symbole nieoznaczone

Wykażemy na wykładzie, że przy $x \to 0$ mamy nastepujące zbieżności:

$$\frac{\sin x}{x} \to 1, \quad (1 + x)^{\frac{1}{x}} \to e, \quad \frac{\log_a(1 + x)}{x} \to \log_a e, \quad \frac{a^x - 1}{x} \to \ln a,$$

$$\frac{(1 + x)^a - 1}{x} \to a.$$

Ponadto gdy $x \to +\infty, a > 1, k > 0$, to mamy

$$\frac{\log_a x}{x} \to 0, \quad \frac{a^x}{x^k} \to +\infty.$$