15 Funkcje ciągłe

Definicja. Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie $x_0 \in D$ gdy albo x_0 nie jest punktem skupienia dziedziny, albo $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Mówimy, że f jest ciągła, gdy jest ciągła w każdym punkcie zbioru D.

Warunek ciągłości w punkcie x_0 można też sformułować na jeden z trzech równoważnych sposobów:

1. Każde otoczenie punktu $f(x_0)$ zawiera obraz przez f pewnego otoczenia punktu x_0
2. (Definicja Cauchy'ego): $\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D}|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$
3. (Definicja Heinego): Jeśli $x_n \in D$ oraz $\lim x_n = x_0$, to $\lim f(x_n) = f(x_0)$.

Jak już wiemy, funkcje spełniające warunek Lipschitza w otoczeniu punktu x_0 są ciągłe- a to dotyczy większości znanych nam funkcji elementarnych. Z arytmetyki granic wynika z kolei, że suma, iloczyn i złożenie[1] funkcji ciągłych będą również ciągłe. Analogicznie- iloraz $\frac{f(x)}{g(x)}$ dwu funkcji ciągłych w punkcie x_0 będzie ciągły, o ile $g(x_0) \neq 0$. Aby wykazać ciągłość większości funkcji odwrotnych musimy najpierw wprowadzić pojęcie granic jednostronnych.

15.1 Granice jednostronne, punkty nieciągłości

Jeśli mówimy o granicy $f : D \to \mathbb{R}$, to automatycznie zakładamy, że x_0 jest *punktem skupienia zbioru* D. Wtedy w każdym sąsiedztwie $S(x_0, \delta)$ tego punktu jest nieskończenie wiele elementów $x_n \in D$, z których można utworzyć ciąg zbieżny do x_0. Gdy jest nieskończenie wiele takich x_n mniejszych od x_0, mówimy o lewostronnym punkcie skupienia zbioru D. Wówczas spośród tych x_n można wybrać podciąg silnie rosnący. Analogicznie określamy pojęcie prawostronnego punktu skupienia zbioru. W takich punktach definiujemy granice jednostronne, jako granice f zawężonej do "sąsiedztwa jednostronnego":

Definicja. Granicę prawostronną funkcji f w punkcie x_0, oznaczaną przez jeden z (równoważnych) symboli:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x), \quad \lim_{x\to x_0, x>x_0} f(x), \quad \text{lub} \quad f(x_0 + 0)$$

definiujemy jako granicę restrykcji f do zbioru $\{x \in D : x > x_0\}$. Analogicznie definiujemy granicę lewostronną -zawężając f do $\{x \in D : x < x_0\}$.

Podkreślmy, że $x_0 + 0$, to nie jest zwykła algebraiczna operacja dodawania, lecz część symbolu. Tak na prawdę, zero symbolizuje tu „nieskończenie mały składnik dodatni". Podobnie, $f(x_0 - 0)$ nie oznacza liczby $f(x_0)$, lecz granicę lewostronną $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$. Wówczas x zmierza do x_0 z lewej strony, czyli przy założeniu $x < x_0$. Przytoczmy tylko warunek "epsilonowo-deltowy" na to by $\gamma \in \mathbb{R}$ była granicą lewostronną:

$$(6.1)\quad \gamma = \lim_{x\to x_0^-} f(x) \;\Leftrightarrow\; \forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D}\ (x_0 - \delta < x < x_0) \Rightarrow |f(x) - \gamma| < \epsilon.$$

Gdy z kolei $\gamma = +\infty$, to zamiast otoczenia o promieniu ϵ należy wówczas użyć "otoczenia punktu $+\infty$" postaci $\{y \in \mathbb{R} : y > C\}$ zadanego przez jakieś C.

Na przykład, $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, zaś $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$. Proszę zbadać granice 1-stronne w punkcie zero dla $f(t) = \exp(\frac{1}{t})$.

Załóżmy, że D jest zarówno lewo -jak i prawo-stronnym punktem skupienia dziedziny. Łatwo można wtedy sprawdzić, że ["obydwie granice jednostronne istnieją w punkcie x_0 i są równe tej samej wartości $\gamma \in \bar{\mathbb{R}}$ "] wtedy i tylko wtedy, gdy ["istnieje obustronna granica $\lim_{x\to x_0} f(x) = \gamma$"].

[1] to najłatwiej zauważyć badając warunek Heinego (3).

Punkt x_0 nazywamy **punktem nieciągłości skokowej** (lub **I typu**), jeśli istnieją w tym punkcie obydwie granice jednostronne skończone, lecz są one różne. Gdy są one sobie równe i skończone, lecz różne od $f(x_0)$, mówimy o **nieciągłości usuwalnej** w tym punkcie. (Zmieniając wartość $f(x)$ jedynie w punkcie $x = x_0$ na $f(x_0 + 0)$ otrzymamy funkcję ciągłą). Gdy któraś z granic jednostronnych nie istnieje w $\bar{\mathbb{R}}$, mówimy o **nieciągłości drugiego typu (lub o nieciągłości istotnej)**. Gdy granica jednostronna (np. prawostronna) istnieje, lecz jest równa $+\infty$, lub$-\infty$, mówimy, że funkcja ma (prawostronną -w tym przypadku) **asymptotę pionową** w punkcie x_0.

Na przykład, funkcja *signum* ma nieciągłość skokową w zerze, zaś jej wartość bezwzględna, $|\mathrm{sgn}(x)|$ ma już tylko nieciągłość usuwalną. Funkcja równa $\sin\frac{1}{x}$ ma nieciągłość drugiego typu, gdyż żadna z granic jednostronnych w zerze nie istnieje. Natomiast funkcja dana wzorem $\frac{1}{\sin x}$ ma asymptoty pionowe lewo- i prawostronne w punkcie 0 i w punktach $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Podobnie, jak dla ciągów monotonicznych, mamy następujące twierdzenie o istnieniu granic jednostronnych dla f monotonicznych na przedziale $(a, b) \subset \bar{\mathbb{R}}$

Twierdzenie 1. Funkcje monotoniczne $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ mają skończone granice jednostronne we wszystkich punktach $x_0 \in (a, b)$. Ponadto dla f niemalejącej

$$f(x_0-0) = \sup\{f(s) : s \in (a, x_0)\} \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0+0) = \inf\{f(t) : t \in (x_0, b)\}.$$

Na końcach przedziału f ma albo granice skończone, albo asymptoty pionowe.

Wynikają stąd kolejne ważne wnioski:

Twierdzenie 2. Funkcja monotoniczna może mieć co najwyżej przeliczalną ilość punktów nieciągłości i to wyłącznie I typu (skokowych). Jeśli x_0 jest punktem nieciągłości, to obraz zbioru (a, b) przez f nie jest przedziałem - zawiera punkty znajdujące się powyżej oraz poniżej przedziału o końcach $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$, zaś z tym przedziałem ma co najwyżej jeden punkt wspólny: $f(x_0)$.

W szczególności, funkcje odwrotne do monotonicznych funkcji określonych na przedziałach -muszą być ciągłe (np. funkcje logarytm, arcsin, arccos, arctg). Faktycznie, dziedzina funkcji odwracanej (np. h) jest równa zbiorowi wartości przyjmowanych przez funkcję (monotoniczną) odwrotną $f = h^{-1}$ i w razie nieciągłości f -nie był by to przedział.

15.2 Asymptoty

Linię o równaniu $x = x_0$ na płaszczyźnie $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nazwiemy linią asymptoty pionowej, lub po prostu -asymptotą pionową, jeśli funkcja ma granicę niewłaściwą (np. lewostronną) w tym punkcie

Mamy też asymptoty ukośne (lub pochyłe) w $+\infty$ (odpowiednio w $-\infty$) -są to linie o równaniu

$$y = Ax + B, \quad \texttt{gdzie} \quad A = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \ B = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - Ax)$$

Gdy $A = 0$ -mówimy o asymptocie poziomej. Np. linia $x = 0$ jest asymptotą poziomą w $-\infty$ dla funkcji wykładniczej e^x. Sens geometryczny asumptot jest nastepujacy: przy zmierzaniu (z odpowiedniej strony) do punktu x_0 (lub do nieskończoności) mamy odległość punktu na wykresie od prostej, jaką tworzy asymptota- zmierzającą do zera. Na przykład dla asymptoty ukośnej

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - (Ax + B) = 0.$$

Wynikają stąd podane wcześniej wzory na A, B. Zauważmy też, że funkcja logarytm nie ma asymptoty w $+\infty$, choć podzielona przez x zmierza do zera.

Jakie asymptoty mają funkcje $x\cos\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}$, $\frac{x^3+1}{x^2-4}$?

15.3 Własności funkcji ciągłych

Symbolem $C[a, b]$ oznacza się zbiór wszystkich funkcji ciągłych na odcinku domkniętym $[a, b]$, gdzie $-\infty < a < b < +\infty$. Jest to przykład tzw. przestrzeni wektorowej. Sumą wektorów $f, g \in C[a, b]$ jest "zwykła suma funkcji" $f + g$, określona wzorem $(f+g)(t) := f(t)+g(t)$. Iloczynem przez skalar $c \in \mathbb{R}$ funkcji f jest cf -funkcja przyjmująca w punkcie $t \in [a, b]$ wartość $(cf)(t) := cf(t)$. Oczywiście, wynikiem tych działań są nadal funkcje ciągłe. Spojrzenie na $C[a, b]$ jako na przestrzaeń wektorową (a nawet przestrzeń Banacha) będzie dla nas istotne w drugiej części kursu. Na razie odnotujmy trzy najważniejsze własności funkcji ciągłych na odcinku domkniętym. Zacznijmy od znanego nam już twierdzenia o osiąganiu wszystkich wartości pośrednich

Twierdzenie 3(Bolzano- Cauchy'ego). Gdy $f(a) < \gamma < f(b)$, to istnieje $c \in (a, b)$ taki, że $f(c) = \gamma$.

Twierdzenie 4(Weierstrassa). Funkcje $f \in C[a, b]$ są ograniczone i osiągają wartości: największą i najmniejszą, czyli $\exists_{\alpha,\beta\in[a,b]}\forall_{t\in[a,b]} f(\alpha) \leqslant f(t) \leqslant f(\beta)$.

Twierdzenie 5(Cantora). Funkcje $f \in C[a, b]$ spełniają nastepujący warunek ciągłości jednostajnej:

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{s,t\in[a,b]}\ |s - t| < \delta \Rightarrow |f(s) - f(t)| < \epsilon. \tag{6.2}$$

Dowód Twierdzenia 3. był już podany (w wykładzie 2.). Dla dowodu tw. 4. podamy jedynie konstrukcję punktu β. Jeśli $s := \sup\{f(t) : t \in [a, b]\}$, to korzystając z faktu, że $s - \frac{1}{n}$ nie jest majorantą -znajdujemy takie $t_n \in [a, b]$, że $s - \frac{1}{n} < f(t_n) \leqslant s$, co daje zbieżność $f(t_n) \to s$. Ponieważ $a \leqslant t_n \leqslant b$, mamy ciąg ograniczony. Z Twierdzenia Bolzano-Weierstrassa (wykład 4.) wynika, że istnieje podciąg zbieżny (t_{n_k}). Jeśli oznaczymy jego granicę jako β, to ze zbieżności $f(t_{n_k}) \to s$ oraz $f((t_{n_k}) \to f(\beta)$ wynika równość $f(\beta) = s$, co oznacza, że w punkcie β funkcja f osiąga wartość największą. □
Uwaga: gdyby nie zakładać, że dziedzina $D(f)$ jest przedziałem domkniętym, mogłoby być $\beta \notin D(f)$ i tu dowód by się załamał. Na przedziałach otwartych funkcje ciągłe mogą być nieograniczone, mając np. asymptotę pionową na końcu przedziału.

Dowód twierdzenia Cantora jest prowadzony metodą nie wprost: Zaprzeczeniem warunku jednostajnej ciagłości jest istnienie $\epsilon_* > 0$ oraz (dla $\delta = \frac{1}{n}$) takiej pary ciągów $(s_n), (t_n)$ punktów z odcinka $[a, b]$, dla których

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\quad |s_n - t_n| \leqslant \frac{1}{n} \quad \texttt{oraz} \quad |f(s_n) - f(t_n)| \geqslant \epsilon_*. \tag{6.3}$$

Jak w poprzednim dowodzie (tw.4.) wybieramy podciąg zbieżny $t_{n_k} \to \beta$ przy $k \to \infty$ do pewnego punktu $\beta \in [a, b]$. Ponownie widzimy, że domkniętość i ograniczoność $D(f)$ jest tu kluczowa. Z pierwszej z nierównosci (6.3) wynika, że również $\lim s_{n_k} = \beta$. Z warunku Heinego ciągłości f w punkcie β uzyskamy zbieżności: $f(s_{n_k}) \to f(\beta)$ oraz $f(t_{n_k}) \to f(\beta)$, co daje równość $\lim\big(f(s_{n_k}) - f(t_{n_k})\big) = 0$, która jest sprzeczna z drugą z nierówności (6.3). □.

Przykładem funkcji ciągłej na przedziale półotwartym $(0, 1]$, która nie jest jednostajnie ciągła -jest $f(x) = \frac{1}{x}$. Dla $t_n = \frac{1}{n}, s_n = \frac{1}{n+1}$ jest $f(s_n) - f(t_n) = 1$ chociaż $|s_n - t_n| \to 0$. Dla $\delta > 0$ będzie $|s_n - t_n| < \delta$ dla n dostatecznie dużych, warunek (6.2) nie będzie zachodził, jeśli $\epsilon < 1$. Twierdzenie Cantora zastosujemy do wykazania całkowalności funkcji ciągłych pod koniec tego semestru.

Można wykazać, że funkcja ciągła na przedziale otwartym ograniczonym (a, b) jest jednostajnie ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy na obydwu końcach tego przedziału istnieją jej granice skończone. Przypisując funkcji wartości w punktach a, b równe tym granicom- otrzymamy funkcję $F \in C[a, b]$ (jednostajnie ciągłą), której restrykcją do (a, b) jest f. Innymi słowy, f ma przedłużenie do funkcji ciągłej na przedziale domkniętym. (Jest to jedno z "łatwiejszych" twierdzeń udowodnionych - w nieco ogólniejszym kontekście -przez S. Banacha.)