16 Pochodne- różniczkowalność

Definicja. Funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna punkcie $x_0 \in D$ gdy istnieje granica ilorazów różnicowych

$$f'(x_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

zwana pochodną funkcji f w punkcie x_0. Dla zapisu pochodnej stosuje się też czasami inne oznaczenia : $\frac{df}{dx}(x_0)$ lub $\frac{d}{dx} f|_{x=x_0}$.

Ostatniego zapisu warto użyć, gdy funkcja określona jest bezpośrednio wzorem, w którym występuje zmienna x - a chcemy policzyć jej pochodną.

Przykład 1. Gdy $f(x) = \sqrt{x + 1}$, to jak łatwo sprawdzić [1] $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$, więc $f'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3+1}} = \frac{1}{4}$, ale można to ująć krócej -zapisując $\frac{d}{dx}\sqrt{x+1}|_{x=3} = \frac{1}{4}$.

Przykład 2. Funkcja "wartość bezwzględna", czyli $f(x) = |x|$ nie jest różniczkowalna w punkcie $x = 0$, chociaż jest wszedzie ciągła. Natomiast funkcja $g(x) := x|x| = x^2{\cdot}\text{sign }(x)$ ma w każdym punkcie pochodną (równą $2|x|$).

To, czy funkcja jest ciągła (odpowiednio -czy jest różniczkowalna) w danym punkcie -zależy jedynie od wartości, jakie funkcja przyjmuje w otoczeniu tego punktu. Mówimy, że sa to *własności lokalne*. Własnością lokalną **nie jest** np. jednostajna ciągłość na dziedzinie funkcji. Te dwie wspomniane powyżej własności lokalne są ze sobą powiązane. Zachodzi bowiem następująca implikacja:

Twierdzenie 1. Różniczkowalność implikuje ciągłość. Czyli każda funkcja różniczkowalna f w punkcie x_0 jest ciągła w tym punkcie.

Faktycznie, oznaczmy symbolem Δf przyrost $\Delta f := f(x_0 + h) - f(x_0)$ wartości f odpowiadający przyrostowi zmiennej niezależnej (=argumentu) o wartość $h = \Delta x$. Widzimy, że f jest ciągła w tym punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy gdy Δf zmierza do zera przy Δx zmierzającym do zera. Natowiast różniczkowalność, to istnienie skończonej granicy $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$, więc wówczas $\Delta f = \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \Delta x \to f'(x_0) \cdot 0 = 0$ przy $\Delta x \to 0$, co oznacza ciągłość. □

Podobnie, jak w przypadku ciągłości, suma, iloczyn i iloraz funkcji różniczkowanych są różniczkowalne. Ale dla iloczynu i ilorazu funkcji wzory na pochodne są bardziej skomplikowane, niż w przypadku arytmetyki granic.

Twierdzenie 2. Załóżmy, że funkcje f, g są różniczkowalne w punkcie x. Wówczas istnieją pochodne w tym punkcie dla ich sumy i iloczynu:

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x), \quad (f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Ponadto gdy $g(x) \neq 0$, to istnieje pochodna ilorazu:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Wzór na pochodną iloczynu, zapisywany też w krótszej postaci (bezargumentowej): $(fg)' = f'g + fg'$ znany jest pod nazwą "**wzór Leibniza**".

Dowód pierwszej równości wynika łatwo z arytmetyki granic oraz z faktu, że $\Delta(f + g) = \Delta f + \Delta g$. Dla iloczynu nie ma tak prostej zależności, bo

$$\Delta(f \cdot g) = f(x + h)g(x + h) - f(x)g(x)$$

Odejmując i dodając do tego wyrażenia $f(x+h)g(x)$ mamy równość $\Delta(f \cdot g) =$

$$= [f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)]+[f(x+h)g(x)-f(x)g(x)] = f(x+h)\cdot\Delta g+\Delta f\cdot g(x).$$

[1] Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia, mnożąc różnicę $\sqrt{x+h+1} - \sqrt{x+1}$ przez sumę $\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}$, następnie dzielimy przez tę samą sumę. Stąd nasz iloraz różnicowy wynosi $\frac{1}{h}(\sqrt{x+h+1} - \sqrt{x+1}) = \frac{1}{\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}}$, co w granicy przy $h \to 0$ daje ten wzór.

Teraz z twierdzenia 1. wynika, że przy $h \to 0$ mamy $f(x+h) \to f(x)$. Stąd i z arytmetyki granic wynika, że iloraz różnicowy $\frac{\Delta(f\cdot g)}{h}$ zmierza do prawej strony wzoru Leibniza gdy $h = \Delta x$ zmierza do zera.

Zapisując $\frac{f}{g}$ jako iloczyn $f \cdot \frac{1}{g}$ i stosując do tego iloczynu wzór Leibniza widzimy, że wzór na pochodną ilorazu wystarczy sprawdzić w prostszym przypadku, gdy $f = 1$. (Pochodna z tej funkcji stałej równa jest 0.) Ponieważ $\Delta(\frac{1}{g}) = \frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x)} = \frac{-\Delta g}{g(x+h)g(x)}$, podzielenie tej równości stronami przez h i skorzystanie z ciągłości g w punkcie x implikują tezę: $(\frac{1}{g})'(x) = \frac{-g'(x)}{(g(x))^2}$. □

16.1 Pochodne podstawowych funkcji elementarnych

Ponieważ $\sin(x+h) - \sin x = 2\sin\frac{h}{2}\cos\frac{2x+h}{2}$, więc $\frac{\Delta \sin}{h} = \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos(x+\frac{h}{2})$, co zmierza do $\cos x$ przy $h \to 0$. Więc $\sin' = \cos$. Podobnie sprawdzimy, że $\cos' = -\sin$. Zauważmy, że $\sin'(x) = \sin(x+\frac{\pi}{2})$, $\sin'(x+n\frac{\pi}{2}) = \sin(x+(n+1)\frac{\pi}{2})$.

Dla $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ wzór na pochodną ilorazu daje $\operatorname{tg}' = \frac{\cos^2+\sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}$. Podobnie można sprawdzić, że $\operatorname{ctg}' = \frac{-1}{\sin^2}$.

Pochodną z a^x jest granica przy $h \to 0$ z ilorazów $\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = a^x(\frac{a^h-1}{h})$, czyli $(a^x)' = a^x \ln a$. Dla $a = e$ mamy $(e^x)' = e^x$.

Stosując Dwumian Newtona lub wzór na $(x+h)^n - x^n$ sprawdzamy, że $(x^n)' = nx^{n-1}$. Można też wykazać ten wzór metodą indukcji matematycznej ze względu na n, jeśli zauważymy, że dla $n = 1$ mamy $x' = 1$ i zastosujemy wzór Leibniza w kroku indukcyjnym.

Teraz ze wzoru na pochodną ilorazu wynika dla $n \in \mathbb{N}$, że

$$(x^{-n})' = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = (-n)x^{-n-1} = \frac{-n}{x^{n+1}}.$$

Stosując wzór skróconego mnożenia można łatwo wykazać, że $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Ostatnie dwa wyniki wskazują, że wzór $(x^a)' = ax^{a-1}$ zachodzi nie tylko dla wykładników $a \in \mathbb{N}$. Wkrótce wykażemy, że jest on prawdziwy $\forall_{a\in\mathbb{R}}$.

16.2 Pochodne złożenia i pochodna funkcji odwrotnej

Dla złożenia $g \circ f$, gdzie $(g\circ f)(x) := g(f(x))$ mamy funkcję wewnętrzną f oraz zewnętrzną: g. Założenia o ich różniczkowalności dotyczą dwu na ogół różnych punktów: x_0 oraz $y_0 := f(x_0)$. Tym razem wygodniej jest zapisać

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Twierdzenie 3. (Reguła Łańcucha) Jeśli f jest różniczkowalna w punkcie x_0 oraz g ma pochodną w punkcie $f(x_0)$, to funkcja złożona ma pochodną w punkcie x_0 oraz

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0). \tag{1}$$

(Pochodną funkcji zewnętrznej mnożymy przez pochodną funkcji wewnętrznej.)

Dowód. Jeśli $y = f(x), y_0 = f(x_0)$, $z = g(y), z_0 = g(y_0)$, to przy $x \to x_0$ mamy $y \to y_0$. Sąsiedztwo $S(x_0,\delta)$ punktu x_0 możemy rozdzielić na dwa zbiory: $A = \{x \in S(x_0,\delta) : f(x) \neq f(x_0)\}$ oraz $B := \{x \in S(x_0,\delta) : f(x) = f(x_0)\}$ W punktach zbioru B mamy $(g\circ f)(x) = (g\circ f)(x_0)$ i iloraz różnicowy równy zero. Jeśli x_0 jest punktem skupienia zbioru B, czyli granicą pewnego ciągu $x_n \in B$, to $f'(x_0) = 0$ i prawa strona wzoru (1) jest zerem, zaś lewa strona zmierza do zera w punktach zbioru B dążących do x_0. Dla $x \in A$ możemy z kolei napisać $\frac{\Delta(g\circ f)}{\Delta x} = \frac{z-z_0}{x-x_0} = \frac{z-z_0}{y-y_0}\cdot\frac{y-y_0}{x-x_0}$ i wyrażenie to zmierza do prawej strony wzoru (1) przy $x \to x_0$. Ponieważ $A \cup B = S(x_0,\delta)$, wynika stąd teza. □

Przykład Funkcja $u(t) := 1+\sin^5 t$ ma pochodną $5\sin^4 t\cos t$, więc pochodna potrójnego złożenia: $\phi(t) := \sqrt{1+\sin^5 t}$ będzie rowna $\frac{1}{2\sqrt{1+\sin^5 t}}5\sin^4 t\cos t$.

Funkcja odwrotna f^{-1} do funkcji f dana jest wzorem $x = f^{-1}(y)$ i spełnia warunek $(f^{-1} \circ f)(x) = x$. Jeśli istnieje pochodna $(f^{-1})'(y_0)$, to z Twierdzenia 3. i z równości $x' = 1$ wyniknie, że $(f^{-1})'(y_0)f'(x_0) = 1$, czyli mamy równość

$$(2) \qquad (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \texttt{a dokładniej:} \quad (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Może się zdarzyć, że $f'(x_0) = 0$, chociaż f jest silnie rosnącą bijekcją (przykład, to $y = x^3$ dla $x_0 = 0$.) Jeśli wykluczymy ten przypadek, to mamy:

Twierdzenie 4. Gdy $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest bijekcją otoczenia punktu x_0 na otoczenie punktu $y_0 = f(x_0)$ oraz istnieje $f'(x_0) \neq 0$, to dla funkcji odwrotnej istnieje pochodna w punkcie y_0 i dana jest ona wzorem (2).

Dowód. W oznaczeniach dowodu Twierdzenia 3. wystarczy zauważyć, że dla punktów x w pewnym sąsiedztwie punktu x_0 musi być $y = f(x) \neq y_0$ i teza o istnienu granicy $\frac{x-x_0}{y-y_0}$ (wraz z równością (2)) wynika z tezy o arytmetyce granic. $\square$

Możemy teraz wyliczyć pochodne dla logarytmu i dla funkcji cyklometrycznych. Na przykład, dla funkcji odwrotnej do $x = \sin(t)$ zawężonej do $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ mamy

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos t} = \frac{1}{cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \texttt{dla} \quad x \in (-1, 1).$$

Tu wykorzystaliśmy fakt, że dla $|t| < \frac{\pi}{2}$ jest $\cos t > 0$, więc $\cos t = +\sqrt{1 - \sin^2 t}$, zaś $\sin(\arcsin x) = x$. Podobnie, $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ dla $|x| < 1$.

Natomiast dla $|t| < \frac{\pi}{2}$ mamy $\mathrm{tg}'(t) = \frac{1}{\cos^2 t}$. Ostatnią wartość chcemy wyrazić przy użyciu $\mathrm{tg}\, t$. Zastępując 1 w liczniku przez $\sin^2 + \cos^2$ widzimy, że $\frac{1}{\cos^2} = 1 + \mathrm{tg}^2$. Podstawiając te dane do wzoru (2) mamy dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ równości

$$\mathrm{arctg}\,'(x) = \cos^2(\mathrm{arctg}\, x) = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2(\mathrm{arctg}\, x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Funkcja $\log_a$ jest odwrotną do wykładniczej: $\mathbb{R} \ni x \mapsto a^x \in (0, +\infty)$, o pochodnej $a^x \ln a$, więc zgodnie ze wzorem (2) dla $y > 0$ mamy wzór $(\log_a y)' = \frac{1}{a^x \ln a}$, w którym zamiast x wstawiamy $\log_a y$, a ponieważ $a^{\log_a y} = y$, otrzymujemy ostatecznie wzór

$$\frac{d}{dy} \log_a y = \frac{1}{y \ln a}.$$

Wszczególności, $\ln' z = \frac{1}{z}$ dla $z > 0$.

Wracając do funkcji potęgowej $x \mapsto x^a$ o wykładniku dowolnym $a \in \mathbb{R}$, mamy $x^a = (e^{\ln x})^a = e^{a \ln x}$. Obliczając pochodną ostatniej funkcji złożonej widzimy (z reguły łańcucha), że $(x^a)' = (e^{a \ln x}) \cdot \frac{a}{x} = x^a \frac{a}{x} = ax^{a-1}$.

Również z reguły łańcucha wynika, że gdy $\forall_x\ f(x) > 0$, to $\frac{d}{dx} \ln(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ -funkcję tego typu nazywamy *pochodną logarytmiczną z f*.

W podobny sposób możemy wyliczyć pochodną z funkcji postaci $\Phi(x) = f(x)^{g(x)}$, gdzie $f(x) > 0$ dla wszystkich $x \in \mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(\Phi)$. W tym celu zapisujemy Φ w postaci złożenia $\Phi(x) = \exp(g(x) \cdot \ln(f(x)))$, gdzie, przypomnijmy, $\exp(t) := e^t$. Pochodną z funkcji wewnętrznej w tym złożeniu, czyli z funkcji $g(x) \cdot \ln(f(x))$ wyliczamy z reguły Leibniza, w której wystąpi też pochodna logarytmiczna: $\frac{d}{dx}[g(x) \ln(f(x))] = \frac{dg}{dx} \cdot \ln(f(x)) + g(x) \frac{\frac{df}{dx}}{f(x)}$. Stąd $\Phi'(x) = \exp(g(x) \ln f(x)) \cdot [g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}]$, co przekształcamy do postaci $f(x)^{g(x)} \cdot [g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}]$.

Funkcja przypisująca punktom x wartość pochodnej: $f'(x)$ nazywana jest **funkcją pochodną dla f i oznaczana symbolem f' lub $\frac{df}{dx}$**. Ta funkcja może (chociaż nie musi) mieć asymptoty w punktach, w których sama f ma asymptoty pionowe. Mogą też dojść takie punkty x_0, w których istnieje prosta styczna do wykresu f, ale jest ona pionowa co odpowiada sytuacji $|f'(x_0)| = +\infty$. Tak jest np. dla $f(x) = \sqrt[3]{x}$ dla $x_0 = 0$.

16.3 Twierdzenia o pochodnych

Mówimy, że **funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ ma maksimum lokalne w punkcie $x_0 \in D$**, gdy istnieje takie otoczenie punktu x_0, kóre zawiera się w zbiorze D i w którym wszystkie wartości f są nie większe od $f(x_0)$. Innymi słowy,

$$\exists_{\delta>0}\forall_x |x - x_0| < \delta \Rightarrow x \in D \texttt{ oraz } f(x) \leqslant f(x_0).$$

Zamieniając kierunek ostatniej nierówności (lub stosując wzór (3) do $-f$ w miejsce f) otrzymamy definicję minimum lokalnego. Mówimy, że f ma silne (=ścisłe) maksimum lokalne w punkcie x_0, gdy dla x z pewnego sąsiedztwa $S(x_0, \delta)$ punktu x_0 jest $x \in D$ oraz $f(x) < f(x_0)$. Ekstremum lokalne to albo minimum lokalne albo maksimum lokalne.

Zwróćmy uwagę, że gdy f jest funkcją ciągłą, a jej dziedzina D jest przedziałem domkniętym $[a, b]$, to f osiąga wartości: największą oraz najmniejszą w tym przedziale w pewnych punktach (dzięki twierdzeniu Weierstrassa). Jeśli jednak któryś z tych punktów był by końcem przedziału $[a, b]$, to ekstremum f nie jest ekstremum lokalnym (bo żadne otoczenie punktu a, ani punktu b nie zawiera się w $[a, b]$). Takie zjawisko nie może pojawić się, gdy dziedzina f jest przedziałem otwartym (ogólniej-zbiorem otwartym), ale wówczas mogą nie istnieć ekstrema z innego powodu: mogą nie istnieć wartości: największa i (lub) najmniejsza funkcji f. Tak jest np. dla f silnie monotonicznych na przedziałach otwartych. Inna różnica między maksimum a maksimum lokalnym, to fakt, że funkcja może mieć maksima lokalne o różnych wartościach w różnych punktach, a tylko jedną wartość maksimum[2]. Zaraz zobaczymy, w jakich punktach mogą być ekstrema lokalne funkcji różniczkowalnych.

Twierdzenie 5. (Fermat). Jeśli funkcja f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0, w którym jest różniczkowalna, to $f'(x_0) = 0$.

Uwaga Warunek $f'(x_0) = 0$ jeszcze nie implikuje, że f ma ekstremum lokalne w x_0!

Dowód Tw.5. Przypuśćmy, że f ma maksimum lokalne w punkcie x_0[3]. Wówczas przyrost $\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0)$ jest stałego znaku (niedodatni) w pewnym otoczeniu punktu x_0, więc granica lewostronna $\lim_{h\to 0^-} \frac{\Delta f}{h}$ jest nieujemna. Przy $h \to 0^+$ granica jest z kolei niedodatnia (tam jest $h > 0$, a nadal $\Delta f \leqslant 0$). Skoro istnieje pochodna $f'(x_0)$, to jest ona równa obydwu granicom jednostronnym, czyli $f'(x_0) = 0$. $\square$

Gdy mamy funkcję f ciągłą w przedziale domkniętym $[a, b]$ i różniczkowalną we wszystkich punktach przedziału otwartego (a, b), przy czym $f(a) = f(b)$, to albo jest ona stała (wtedy $f' = 0$, albo osiąga wartość najmniejszą lub największą w pewnym punkcie $c \in (a, b)$. Bo f w $[a, b]$ osiąga zarówno swoje minimum m, jak i maksimum M i o ile f nie jest stała, to któraś z tych wartości jest osiągnięta w punkcie $c \in (a, b)$ -dokładnie ta, która jest różna od $f(a)$. Wówczas jest to ekstremum lokalne i z Tw.5. wiemy, że $f'(c) = 0$ Wykazaliśmy więc następujące *twierdzenie o wartości średniej*:

Twierdzenie 6. (Rolle'a) Jeśli dla funkcji ciągłej $f \in C[a, b]$ różniczkowalnej w (a, b) mamy $f(a) = f(b)$, to istnieje przynajmniej jeden taki punkt $c \in (a, b)$, że $f'(c) = 0$.

Jeśli pominęlibyśmy założenie, że $f(a) = f(b)$, to teza tw.6 na ogół nie zachodzi. Może się zdarzyć, że $f(a) = \min\{f(t) : t \in [a, b]\} < f(b) = \max\{f(t) : t \in [a, b]\}$. Tak jest np. dla $f(x) = x$. W takim ogólnym przypadku zamiast zera należy w analogicznej tezie wziąć po prosu iloraz różnicowy $J := \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Przy założeniach twierdzenia 6. było $J = 0$ i do takiej sytuacji można sprowadzić zagadnienie zastępując funkcję f przez funkcję pomocniczą $h(x) := f(x) - J \cdot (x - a)$. Mamy $h(a) = f(a) - 0 = f(a)$, zaś $h(b) = f(b) - J(b - a) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a)$. Więc funkcja pomocnicza h spełnia założenia twierdzenia Rolle'a: $h \in C[a, b]$ jest różniczkowalna w (a, b), przy czym $h(a) = h(b)$. Istnieje więc punkt $c \in (a, b)$, w kórym $h'(c) = 0$. Ale $h'(c) = f'(c) - J$. W ten sposób wykazaliśmy mastępujące *twierdzenie o wartości średniej.* (Jest to, jak zobaczymy, jedno z najważniejszych twierdzeń rachunku różniczkowego.)

Twierdzenie. (Lagrange'a) Jeśli funkcja ciągła $f \in C[a, b]$ jest różniczkowalna w przedziale (a, b), to istnieje punkt $c \in (a, b)$, w którym

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

[2] Na przykład, dla $f(x) = \cos x$ maksimum lokalne równe 1 występuje w każdym z punktów postaci $k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Funkcja $\frac{x}{2} + \cos x$ ma nieskończenie wiele różnych wartości w punktach maksimum lokalnego

[3] W przypadku minimum lokalnego wystarczy rozpatrzeć $-f$ zamiast f.