17 Zastosowania pochodnych

Zacznijmy od uzupełnienia ostatniego wykładu o ostatnie z trójki *twierdzeń o wartości średniej*, którego autorem był Augustin Louis Cauchy, jeden z najwybitniejszych matematyków francuskich 1.połowy XIX w., twórca między innymi współczesnego kursu analizy matematycznej.

Twierdzenie 1. (O WARTOŚCI ŚREDNIEJ CAUCHY'EGO) Jeśli funkcje ciągłe $f, g \in C[a, b]$ są różniczkowalne w przedziale (a, b), oraz $\forall_{t\in(a,b)} g'(t) \neq 0$, to istnieje punkt $c \in (a, b)$, w którym

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \tag{8.1}$$

Podobnie, jak w dowodzie twierdzenia Lagrange'a używamy funkcji pomocniczej (oznaczmy ją symbolem ψ). Jeśli P oznacza prawą stronę (1), to niech $\psi(x) = f(x) - P\cdot(g(x) - g(a))$. Oczywiście, $\psi(a) = f(a)$, ale również $\psi(b) = f(a)$ i funkcja ψ spełnia założenia Twierdzenia Rolle'a. Istnieje więc punkt $c \in (a, b)$ w którym $\psi'(c) = 0$. Ale $\psi' = f' - Pg'$, stąd otrzymujmy równość (8.1).

Z tego twierdzenia wynika słynna Reguła de l'Hospitala stanowiąca bardzo pomocne narzędzie do liczenia granic symboli nieoznaczonych.

Twierdzenie 2. (REGUŁA DE L'HOSPITALA) Zakładamy, że funkcje f, g są różniczkowalne w przedziale (a, b) oraz $\forall_{t\in(a,b)} g'(t) \neq 0$. Ponadto zakładamy, że przy $x \to b^-$ wyrażenie $\frac{f(x)}{g(x)}$ jest symbolem nieoznaczonym typu $\frac{0}{0}$ lub typu $\frac{\infty}{\infty}$. Wówczas z istnienia granicy ilorazu pochodnych:

$$\gamma = \lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \texttt{wynika istnienie} \quad \lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \gamma.$$

Chociaż sformułowane tu jedynie dla granic lewostronnych, twierdzenia to zachodzi również dla granic pozostałych typów: dla granic prawostronnych i dla granic w $+\infty$ lub w $-\infty$. Odwrotna implikacja nie zachodzi: może istnieć $\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$, przy równoczesnym nieistnieniu $\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Przykładu dostarcza $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$. Twierdzenia tego nie można używać do granic służących do wykazania różniczkowalności funkcji elementarnych typu $\sin x, a^x$. Jak widać z założeń, twierdzenie nie obejmuje przypadku innego, niż symbole nieoznaczone. Na przykład, dla $f(x) = \alpha + \sin x, g(x) = 1 + x$, gdzie α, jest stałą różną od zera, mamy $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$, ale iloraz pochodnych zmierza do 1 -więc jego granica w zerze nie zależy od α. Oczywiście, w takich przypadkach wystarczy nam arytmetyka granic.

Szkic dowodu Dla granic typu $\frac{0}{0}$ możemy przedłużyć f, g do funkcji ciągłych n $F, G \in C[\beta, b]$, gdzie $a < \beta < b$, zaś $F(b) = 0 = G(b)$. Stosując Twierdzenie 1. znajdujemy taki (zależący od β) punkt $c_\beta \in (\beta, b)$, że $\frac{F'(c_\beta)}{G'(c_\beta)} = \frac{F(b)-F(\beta)}{G(b)-G(\beta)}$. Ostatni iloraz jest równy $\frac{f'(\beta)}{g'(\beta)}$, więc przy $\beta \to b^-$ zmierza do γ, ponieważ $c_\beta \to b^-$ gdy $\beta \to b^-$. Znacznie trudniejszy jest dowód w przypadku $\frac{\infty}{\infty}$, można skorzystać z Twierdzenia Stolza (Tw.4. z wykładu 4.) i z obserwacji, że funkcją g zmierzająca do $+\infty$, o pochodnej niezerującej się musi być (silnie) rosnąca. Ponadto liczba γ jest granicą lewostronną $\lim_{x\to b^-} \phi(x)$ (u nas $\phi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu silnie rosnącego t_n zbieżnego do b jest $\gamma = \lim_{n\to\infty} \phi(t_n)$. Zastosowanie do ciągu $\phi(t_n)$ twierdzenia Stolza sprowadza więc dowód do wykazania, że ilorazy "przyrostów tych ciągów":

$$\frac{f(t_{n+1}) - f(t_n)}{g(t_{n+1}) - g(t_n)}$$

zmierzają do γ. Dla tych ilorazów przyrostów stosujemy Tw.4. -znajdując dla każdego n punkt s_n leżący pomiędzy t_n oraz t_{n+1} w kórym te ilorazy przyrostów są równe $\frac{f'(s_n)}{g'(t_n)}$. Ale z założenia, te wartości zmierzają do γ.

Do symboli nieoznaczonych innych typów te można stosować Regułę de l'Hospitala: np. dla symbolu $0 \cdot \infty$, gdy $f(x) \to 0, g(x) \to +\infty$, to

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}, \tag{8.2}$$

a ostatnie wyrażenie jest już typu $\frac{0}{0}$. Podobnie, do takiej postaci przekształcamy wyrażenie typu $\infty - \infty$ pisząc

$$f - g = \frac{1}{\frac{1}{f}} - \frac{1}{\frac{1}{g}} = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{f \cdot g}}. \tag{8.3}$$

Wyrażenia typu 1^∞ -na przykład $(1 + \frac{1}{x})^x$ przy $x \to \infty$ sprowadzamy do postaci $0 \cdot \infty$ poprzez przekształcenie

$$f(x)^{g(x)} = \exp\big((\ln f(x)) \cdot g(x)\big). \tag{8.4}$$

Liczymy granicę funkcji w wykładniku, następnie wykorzystamy ciągłość funkcji exp. Podobnie postąpimy w przypadku symboli nieoznaczonych ∞^0.
Przykłady:

[$P1$]
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin 3x} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{3\cos 3x} = \frac{2}{3}$$

[$P2$]
$$\lim_{x\to\pi} \Big(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\pi - x}\Big) = \lim_{x\to\pi} \frac{(\pi - x) - \sin x}{(\pi - x)\sin x} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to\pi} \frac{-1 - \cos x}{-\sin x + (\pi - x)\cos x} \overset{[\frac{0}{0}]}{=}$$

$$= \lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{-\cos x + (\pi - x)(-\sin x) - \cos x} = \frac{0}{2} = 0$$

[$P3$]
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = e^L, \quad \texttt{gdzie } L := \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \ln(\operatorname{tg} x) =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\frac{1}{\operatorname{tg} 2x}} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x \cos^2 x}}{\frac{-2/\cos^2 2x}{\operatorname{tg}^2 2x}} = -1 \ , \quad \texttt{czyli } e^L = \frac{1}{e}.$$

W pierwszym z przykładów mieliśmy wyrażenie nieoznaczone typu $[\frac{0}{0}]$, w drugim -typu $\infty - \infty$ (dla obydwu granic 1-stronnych), które zamieniliśmy na wyrażenie typu $\frac{0}{0}$ stosując przekształcenie (8.3). Wyrażenie typu 1^∞ w [P3] zamieniliśmy najpierw stosując (8.4) i ciągłość funkcji exp na e^L, gdzie L było typu $\infty \cdot 0$ dla granicy lewostronnej oraz $(-\infty) \cdot 0$ -dla prawostronnej, następnie zastosowaliśmy przekształcenie (8.2).

17.1 Pochodne wyższych rzędów

Druga pochodna z funkcji f, oznaczana f'' lub $\frac{d^2 f}{dx^2}$ -jeśli zmienną jest x -to pochodna z funkcji f'. Jeśli w danym punkcie f oraz f' są różniczkowalne, to mówimy, że f jest 2-krotnie różniczkowalna. Podobnie definiujemy n-tą pochodną: $f^{(n)}$ $(=\frac{d^n f}{dx^n})$. Będzie to definicja rekurencyjna, w której zakładamy, że znamy wartość funkcji $g = f^{(n-1)}$. Różniczkowalność tej funkcji g nazwiemy n-krotną różniczkowalnością f. Zaczynamy (co z pewnych względów będzie wygodne) od przypadku $n = 0$:
Definicja. Pochodną $f^{(n)}$ rzędu $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ z funkcji $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ definiujemy w następujący sposób:

$$f^{(0)} = f, \quad \texttt{a dla} \quad n \in \mathbb{N} \ \texttt{niech} \ f^{(n)} := (f^{(n-1)})'.$$

Jak łatwo wykazać (metodą indukcji ze względu na n) odwzorowanie przypisujące funkcji f jej n-tą pochodną ma następujące własności: Dla dowolnych funkcji n-krotnie różniczkowalnych f, g i dla dowolnej stałej C (oraz B) mamy

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)} \quad \texttt{oraz} \quad (Cf)^{(n)} = Cf^{(n)}. \tag{8.5}$$

Ponadto z reguły łańcucha wynika, że

$$\frac{d^n}{dx^n}\big(f(Bx+C)\big) = B^n\big(\frac{d^n f}{dx^n}\big)(Bx+C). \tag{8.6}$$

Przykłady.
$(e^x)^{(n)} = e^x$, zaś $(a^x)^{(n)} = (\ln a)^n a^x$. W przypadku $a \neq e$ w dowodzie kroku indukcyjnego stosujemy drugą z równości (8.5) dla $C = (\ln a)^{n-1}$.
$(x^k)'' = (kx^{k-1})' = k(k-1)x^{k-2}$, o ile $k \geqslant 2$. Ogólnie,

$$\forall_{k\geqslant n}\ (x^k)^{(n)} = k(k-1)\cdots(k-n+1)x^{k-n} \ \texttt{oraz}\ \forall_{n>k, k\in\mathbb{N}}\ (x^k)^{(n)} = 0.$$

W szczególności, dla $n = k$ pochodna rzędu k z x^k jest funkcją stałą równą $k!$. Dla stałych $B = 1, C = -x_0$ we wzorze (8.6) otrzymujemy dla $k \geqslant n$ równość

$$((x-x_0)^k)^{(n)} = k(k-1)\cdots(k-n+1)(x-x_0)^{k-n}.$$

Wynika stąd (i z (8.4)), że dla wielomianu postaci $P(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + \cdots + c_k(x-x_0)^k$ jego n-ta pochodna ma w punkcie x_0 wartość $P^{(n)}(x_0) = n!c_n$. W szczególności, wielomian stopnia nie większego niż k, którego n-te pochodne w punkcie x_0 mają dla wszystkich $n = 0, 1, \ldots, k$ wartości takie same, jak funkcja f musi być postaci

$$(T_{k,x_0}f)(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \sum_{j=0}^{k}\frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j.$$

Wielomian ten nazywamy wielomianem Taylora rzędu k dla funkcji f w punkcie x_0. Gdy $x_0 = 0$ -a to najczęściej stosowany przypadek- wielomian ten nazywamy też wielomianem Maclaurina rzędu k dla f. Jest to wielomian

$$(T_k f)(x) = \sum_{j=0}^{k}\frac{f^{(j)}(0)}{j!}x^j.$$

Zwróćmy uwagę, że nie mówimy o stopniu, tylko o rzędzie, bo może być $f^{(k)}(x_0) = 0$ i wówczas stopień wielomianu Taylora jest mniejszy od k.

Stosując Regułę de l'Hospitala w kroku indukcyjnym, zaś samą definicję ciągłości gdy $k = 0$ lub definicję pochodnej gdy $k = 1$ można wykazać bardzo ważny wzór, jaki dla reszty we wzorze Taylora, czyli dla funkcji

$$(R_{k,x_0}f)(x) := f(x) - (T_{k,x_0}f)(x)$$

uzyskał włoski matematyk Giuseppe Peano. (W dowodzie indukcyjnym wykorzystuje się fakt, że $\forall_{j\leqslant k}$ pochodne rzędu j z funkcji $(R_{k,x_0}f)(x)$ w punkcie $x = x_0$ są zerem i indukcją na k wykazuje się, że funkcje o takiej własności muszą być o-małe od $(x-x_0)^k$ gdy $x \to x_0$.) Zakładamy, że f jest k-krotnie różniczkowalna w punkcie x_0.

Twierdzenie (Peano o reszcie we wzorze Taylora). $\exists f^{(k)}(x_0) \Rightarrow$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-(T_{k,x_0}f)(x)}{(x-x_0)^k} = 0.$$

Matematycy i fizycy często lubią używać symbolu "o-małe": Podamy jego definicję tylko w szczególnym przypadku, gdy $g(x) \neq 0$ w pewnym sąsiedztwie punktu x_0.

Definicja. Mówimy, że określona w sąsiedztwie x_0 funkcja $r(x)$ jest o-małe od funkcji $g(x)$ (lub "funkcja $r(x)$ jest wielkością nieskończenie małą rzędu mniejszego, niż funkcja $g(x)$, co zapisujemy $r(x) = o(g(x))$ przy $x \to x_0$, jeżeli $\lim_{x\to x_0}\frac{r(x)}{g(x)} = 0$.

Tak więc "wzór Peano na resztę Taylora" można zapisać tak:

$$f(x) = (T_{k,x_0}f)(x) + o\big((x-x_0)^k\big) \texttt{ przy } x \to x_0,$$

ponieważ reszta: $(R_{k,x_0}f)(x)$ jest o-małe od $(x-x_0)^k$ gdy $x \to x_0$.

Przypuśćmy teraz, że

$$f'(x_0) = 0, ..., f^{(k-1)}(x_0) = 0, f^{(k)}(x_0) > 0$$

Wówczas wielomian Taylora dla f ma tylko dwa niezerowe składniki: dla $j = 0$ oraz dla $j = k$. Oznaczmy przez $\alpha(x)$ zmierzający do 0 (na mocy Tw.Peano) iloraz: $\alpha(x) := \frac{R_{k,x_0}(x)}{(x-x_0)^k}$ Mamy więc

$$f(x) = f(x_0)+\cdots+\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k+R_{k,x_0}(x) = f(x_0)+(x-x_0)^k\big(\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}+\alpha(x)\big).$$

Ponieważ granica wyrażenia w ostatnim nawiasie przy $x \to x_0$ jest takiego samego znaku, jak $f^{(k)}(x_0)$ (w naszym przypadku > 0), więc wyrażenie w tym nawiasie jest > 0 w pewnym sąsiedztwie punktu x_0 - wtedy w tym sąsiedztwie jest $f(x) > f(x_0)$ dla k parzystych (i wtedy f ma ścisłe minimum lokalne w x_0). Dla k nieparzystych nie ma ekstremum lokalnego, bo kierunki ostatniej nierówności zmieniają się w tym sąsiedztwie w zależności od tego, czy $x < x_0$ -czy też $x > x_0$. Faktycznie, funkcja $(x-x_0)^k$ zmienia wtedy znak. Reasumując mamy warunek wystarczający na istnienie ekstremum lokalnego:

Twierdzenie. Jeżeli w punkcie x_0 pochodne f rzędów $1, \dots, k-1$ są równe zero, zaś $f^{(k)}(x_0) \neq 0$, to w przypadku k nieparzysego f nie ma ekstremum lokalnego w x_0. Gdy k jest parzyste, to f ma istotne ekstremum lokalne: minimum lokalne gdy $f^{(k)}(x_0) > 0$ oraz maksimum lokalne –gdy $f^{(k)}(x_0) < 0$.

Najczęściej w zadaniach spotykamy sytuację, w której $k = 2$. Na przykład, dla $f(x) = x\exp(\frac{1}{x-2})$ jest $f' = \big(1 - \frac{x}{(x-2)^2}\big)\exp(\frac{1}{x-2})$ i mamy dwa miejsca zerowe pochodnej: w punktach $1, 4$. Po (dość żmudnym) wyliczeniu sprawdzamy, że $f''(1) < 0, f''(4) > 0$. Funkcja ta ma więc maksimum lokalne w $x = 1$ oraz minimum lokalne w punkcie 4. W tym przykładzie łatwiej jest określić przedziały monotoniczności badając znak f', co pozwoli określić punkty i typ ekstremów lokalnych bez wyliczania f''. Pamiętajmy też, że f ma asymptotę pionową $x = 2$.

Innym zastosowaniem wzoru Taylora jest wyliczanie wartości przybliżonej funkcji. Przybliżeniem będzie tu wielomian Taylora, a błędem przybliżenia będzie reszta $(R_{k,x_0}f)(x)$. Aby oszacować wielkość tego błędu najczęściej używa się wzoru na tę resztę odkrytego przez Lagrange'a. Jego dowód pominiemy. Dla $k = 0$ teza jest równoważna twierdzeniu Lagrange'a o wartości średniej.

Twierdzenie Lagrange'a o reszcie we wzorze Taylora. Jeżeli f ma pochodne rzędu $k + 1$ w punktach odcinka otwartego o końcach x_0, x, i jest ciągła również w punktach x, x_0 to istnieje punkt c z tego odcinka, dla którego

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}.$$

Innymi słowy, reszta $(R_{k,x_0}f)(x)$ wygląda "prawie tak", jak $k+1$-szy składnik wielomianu Taylora -ale pochodna rzędu $k+1$ jest w nim liczona w pewnym punkcie pośrednim c. Dla wielu funkcji elementarnych w pewnym otoczeniu punktu x_0 istnieją wspólne ograniczenia dla pochodnych rzędu k przy $k \to \infty$ i wówczas ciąg k-tych rezt Taylora zmierza do zera w tym otoczeniu. W takim przypadku mówimy, że f jest sumą swojego szeregu Taylora o środku x_0. Jeśli tak jest dla wszystkich punktów x_0 z dziedziny, to taką f nazwiemy *funkcją analityczną* i piszemy wówczas

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j. \qquad \texttt{Na przykład,}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k, \quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{(2k+1)}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{(2k)}.$$