18 Badanie przebiegu funkcji

18.1 funkcje wypukłe

Na koniec poznajmy zastosowanie drugiej pochodnej do badania wypukłości funkcji. Będziemy tu rozważać jedynie funkcje określone na przedziałach. Zauważmy, że zbiór $D \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem , gdy dla dowolnej pary punktów $a, b \in D$ również cały odcinek o końcach a, b, czyli zbiór $\{a+t(b-a) : t \in [0,1]\}$ zawiera się w zbiorze D.

Definicja Gdy cięciwy łączące punkty na wykresie funkcji $f : D \to \mathbb{R}$ leżą nad wykresem, to mówimy, że f jest wypukła. Odpowiada to nierównościom:

$$f(a) + t(f(b) - f(a)) \geqslant f(a + t(b - a)) \qquad \forall a, b \in D, \, t \in (0, 1). \tag{1}$$

Jeśli nierówności (1) są ostre, mówimy o funkcji ścisle wypukłej. Gdy $-f$ jest wypukła, to mówimy, że f jest wklęsła. Kierunki mogą się mylić, więc zapamiętajmy: funkcja exp jest wypukła. Mamy bowiem następujące kryterium.

Twierdzenie 1 *Funkcja różniczkowalna jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna jest niemalejąca. Gdy $\exists f''$, to wypukłość f jest równoważna nieujemności f'' . Gdy $f''(x) > 0$ dla wszystkich $x \in D$, to f jest ściśle wypukła.*

Jedyne funkcje, które są równocześnie wypukłe i wklęsłe, to wielomiany stopnia $\leqslant 1$, czyli funkcje postaci $f(x) = Ax + B$. Wtedy bowiem wykres pokrywa się (na przedziałach typu $[a, b]$) z każdą jego sieczną.

Warunek (1) Można zapisać równoważnie jako pewną nierówność dla ilorazów różnicowych. Niech $x_0 = a < b = x_1, x_t := x_0 + t(x_1 - x_0)$ oraz $y_t = f(x_t)$ dla $0 \leqslant t \leqslant 1$. Wtedy (1) jest nierównością: $y_0 + t(y_1 - y_0) \geqslant y_t$, czyli $ty_1 + (1 - t)y_0 \geqslant (t + 1 - t)y_t$. Równoważnie,

$$(y_t - y_0)(1 - t) \leqslant t(y_1 - y_t). \tag{$*$}$$

Zauważmy, że $t = \frac{x_t - x_0}{x_1 - x_0}$ oraz $1 - t = \frac{x_1 - x_t}{x_1 - x_0}$, więc mnożąc stronami (*) przez $(x_1 - x_0)$, a następnie dzieląc przez $(x_t - x_0)(x_1 - x_t)$ otrzymamy nierówność dla ilorazów różnicowych:

$$\frac{y_t - y_0}{x_t - x_0} \leqslant \frac{y_1 - y_t}{x_1 - x_t}. \tag{2}$$

Gdy $f'' \geqslant 0$, to f' jest niemalejąca, zaś z twierdzenia Lagrange'a istnieją s, r takie, że $0 < s < t < r < 1$ oraz $\frac{y_t - y_0}{x_t - x_0} = f'(x_s)$, $\frac{y_1 - y_t}{x_1 - x_t} = f'(x_r)$. Z założenia $f'' \geqslant 0$ wynikają zatem nierówności (2) oraz (1), czyli wypukłość. Implikację w drugą stronę można wykazać pamiętając, że pochodna jest granicą ilorazów różnicowych, a słabe nierówności zachowują się przy przejściu do granicy. Tu porównywać będziemy ilorazy różnicowe na na ogół rozłącznych przedziałach, czyli $I_{a_1,b_1} := \frac{f(b_1) - f(a_1)}{b_1 - a_1}$ oraz I_{a_2,b_2}, gdzie $a_1 < b_1 < a_2 < b_2$. Ale z nierowności (1) wynika, że,

$$I_{a_1,b_1} \leqslant I_{b_1,a_2} \leqslant I_{a_2,b_2}.$$

Przechodząc teraz do granic przy $b_j \to a_j^+$ wnioskujemy, że f' jest niemalejąca.

Ze wspomnianej monotoniczności ilorazów różnicowych można łatwo wywnioskować, że wartości tych ilorazów są wspólnie ograniczone na przedziałach o końcach a, b zawartych w dziedzinie (α, β) funkcji wypukłej f, o ile $\alpha + \epsilon < a < b < \beta - \epsilon$, a ponieważ $|f(b) - f(a)| = |b - a|| \frac{f(b) - f(a)}{b - a}|$, wynika stąd ciągłość funkcji wypukłych w punktach wewnętrznych dziedziny.

Przy szukaniu ekstremów warto pamiętać, że funkcje wypukłe osiągają wartości największe na brzegu dziedziny (gdy jest ona odcinkiem domkniętym- to na jeddnym z jego końców). W przypadku funkcji wypukłej wielu zmiennych -czyli spełniających warunek (1)- wartości największej wystarczy szukać w tzw. punktach ekstremalnych dziedziny, które dla wielościanu są po prostu jego wierzchołkami.

19 Badanie przebiegu funkcji

Jeśli mamy wzór zadający jakąś funkcję, chcemy wywnioskować pewne jej własności, określić jej „punkty charakterystyczne” i (przynajmniej w pewnym przybliżeniu) naszkicować wykres. Przechodząc przez kolejne punkty poniższej procedury będziemy w stanie zgromadzić (np. w formie tabelki) potrzebne w tym celu dane. Kolejność postępowania jest następująca:

- Określamy dziedzinę $D(f)$ badanej funkcji f;
- Jeśli dziedzina jest symetryczna względem zera, sprawdzamy, czy przypadkiem funkcja nie jest parzysta, bądź nieparzysta;
- W przypadku, gdy do dziedziny należą punkty z otoczenia jednostronnego danego punktu $x_0 \notin D(F)$, badamy granice (lewo- / prawostronne) w tym punkcie. Dotyczy to również punktów $x_0 = \pm\infty$. Tym samym badamy istnienie asymptot pionowych (=$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = x_0, y \in \mathbb{R}\}$) w punktach $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz asymptot poziomych gdy $x_0 = \pm\infty$;
- Jeśli istnieje $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = A \in \mathbb{R}$, badamy, czy istnieje asymptota ukośna (o równaniu $y = Ax + B$). Wtedy $B = \lim_{x\to+\infty} f(x) - Ax$. Podobnie -w $-\infty$. Nasz wykres będzie nieograniczenie bliski linii asymptoty w „pobliżu x_0”;
- Na ogół funkcja jest ciągła na swej dziedzinie -w przeciwnym przypadku określamy jej punkty nieciągłości i ich charakter (skokowe/usuwalne/II typu);
- Wyznaczamy miejsca zerowe (i znak funkcji w odpowiednich przedziałach);
- Znajdujemy pochodną (podając jej dziedzinę i wzór);
- Określamy miejsca zerowe pochodnej i jej znak, co na ogół daje informację o ekstremach lokalnych funkcji i o jej przedziałach monotoniczności;
- Obliczamy drugą pochodną (podając jej dziedzinę i wzór);
- Określamy, na jakich przedziałach funkcja jest wypukła (odp. wklęsła), znajdując ewentualne punkty przegięcia tzn. takie, w których zmienia się typ wypukłości;
- Sporządzamy tabelkę, umieszczając na jej ”poziomej osi” -czyli w pierwszym wierszu -punkty charakterystyczne. Są to (zaczynając od $-\infty$, w porządku rosnącym) krańce dziedziny, czy ogólniej, punkty spoza dziedziny, będące krańcami przedziałów tworzących dziedzinę, miejsca zerowe funkcji i jej pochodnych: f', f''. W kolejnych wierszach zamieszczamy symbole $+, -, 0$ odpowiadające znakowi f, f', f'' W przypadku znaku $+$ dla f' możemy zaznaczyć ukośną strzałkę w prawo w górę -na danym przedziale f rośnie; W analogicznej sytuacji dla drugiej pochodnej -zaznaczamy, czy wypukłość jest zwrócona ku górze ($f'' < 0$, wklęsłość f), czy ku dołowi -rysując (z uwzględnieniem monotoniczności) kawałki łuków. One dadzą już przybliżony przebieg wykresu f; Uwzględniając na osi wspomniane punkty charakterystyczne (i wartości f w tych punktach), rysujemy przybliżony wykres funkcji.

Przykłady podam na wykładzie. (Niestety, procedura ta bywa dość pracochłonna, czasami warto skorzystać z programów komputerowych tworzących wykresy. Najbardziej precyzyjny i rozbudowany program ”Mathematica” na stronie internetowej http://functions.wolfram.com/ podaje wykresy setek funkcji, ale jako funkcji zmiennej zespolonej, są to więc wykresy trójwymiarowe (np. rozdzielane na osobne wykresy części rzeczywistj i zespolonej), jednak można jednak uzyskać tam również ich zawężenia do osi rzeczywistej.

19.1 Przykłady

Zbadamy przebieg funkcji danej dla $x \in \mathbb{R}$ wzorem $\varphi(x) = 2|x|e^{-|x+1|}$.

Dziedziną jest $\mathbb{R}$, funkcja jest ciągła -jako iloczyn funkcji ciągłych (ciagłość drugiego czynnika wynika z ciągłości złożenia funkcji ciągłych). Z wyjątkiem jedynego miejsca zerowego dla $x = 0$ funkcja ma wartości dodatnie. φ nie jest ani nieparzysta ani parzysta -wystarczy uwzględnić $x = \pm 1$. Przy $|x| \to \infty$ mamy $\varphi(x) \to 0$ (np. dla $x \to +\infty$ jest $\varphi(x) = \frac{x}{e^1 e^x} \to 0$), co wyniknie np. z Reguły de l'Hospitala.

Obliczając pochodną musimy osobno rozpatrywać 3 przypadki w zależności od znaku x i znaku $x+1$. W każdym z tych przypadków mamy pochodną iloczynu i należy zastosować wzór Leibniza. Ponieważ wykładnik jest równy $-|x+1|$, czyli $x+1$ dla $x \leqslant -1$ oraz $-(x+1)$ dla $x > -1$, zaś $|x| = -x$ dla $x \leqslant 0$, w przedziałach $(-\infty, -1), (-1, 0)$ oraz $(0, +\infty)$ mamy $\varphi'(x)$ równe odpowiednio

$$\varphi'(x) = \begin{cases} (-2x-2)e^{x+1}, & x < -1; \\ (2x-2)e^{-x-1}, & -1 < x < 0; \\ (2-2x)e^{-x-1}, & x > 0. \end{cases}$$

Punkty "sklejenia" : czyli w naszym przypadku punkty $x = -1, x = 0$ nie należą do dziedziny φ'. Faktycznie, aby np. $\varphi'(-1)$ istniała, lewostronna granica ilorazów różnicowych, czyli "lewostronna pochodna" $\varphi'_-(-1)$ powinna być równa granicy prawostronnej, $\varphi'_+(-1)$. Licząc granicę lewostronną uwzględniamy wartości dane pierwszym z 3 wzorów, który określa funkcję różniczkowalną w otoczeniu -1 (a nawet w $\mathbb{R}$), więc ta pochodna lewostronna jest pochodną w punkcie -1 z funkcji $-2xe^{x+1}$, czyli wartością funkcji $(-2x-2)e^{x+1}$ dla $x = -1$. Stąd $\varphi'_-(-1) = 0$. Analogicznie, $\varphi'_+(-1) = \frac{d}{dx}(-2xe^{-x-1})|_{x=-1} = -4 \neq \varphi'_-(-1)$. Podobnie sprawdzamy, że $\varphi'_-(0) = -2e^{-1} \neq \varphi'_+(0) = 2e^{-1}$.

Badamy znak $\varphi'(x)$. Czynnik $e^{-|x+1|}$ jest stale dodatni, więc znak okresla pierwszy czynnik i mamy $\varphi' > 0$ w zbiorze $E = (-\infty, -1) \cup (0, 1)$, tam φ rośnie na każdym z tych 2 przedziałów, zaś maleje w $(-1, 0)$ oraz w $(1, +\infty)$. (UWAGA: jeśli jakiś zbiór E jest sumą rozłącznych przedziałów, to ze znaku pochodnej nie wywnioskujemy monotoniczności na całym zbiorze E - n.p mamy $\varphi'(-2) > \varphi(\frac{1}{2})$.)

Ponieważ w domknięciach tych przedziałów φ jest ciągła, z Tw. Lagrange'a wynika, że w odpowiednich przedziałach domkniętych jest też silnie monotoniczna. Skoro φ rośnie na lewo od punktu -1, zaś maleje na prawo od niego (w pewnym otoczeniu), to jest tam maksimum lokalne, $\varphi(-1) = 2$. Drugi z punktów "podejrzanych o ekstremum", to punkt $x = 0$, w którym pochodna też nie istnieje. Ponieważ $\varphi(0) = 0 < \varphi(t) \, \forall_{t \neq 0}$, jest to wartość najmniejsza badanej funkcji. Ponieważ w punkcie $z = 1$ pochodna zmienia znak z dodatniego na ujemny - jest tam maksimum lokalne, $\varphi(1) = \frac{2}{e} < \varphi(-1) = 2$, stąd (i z faktu, że nie ma innych ekstremów, zaś $\varphi(x) \to 0$ gdy $|x| \to \infty$)wynika, że @ jest wartością największą φ w całej jej dziedzinie.

Drugą pochodną liczymy w każdym z 3 przedziałów otwartych z osobna, otrzymując

$$\varphi''(x) = \begin{cases} (-2x-4)e^{x+1}, & x < -1; \\ -(2x-4)e^{-x-1}, & -1 < x < 0; \\ (2x-4)e^{-x-1}, & x > 0. \end{cases}$$

Wynika stąd, że $\varphi''(x) = 0$ dla $x = \pm 2$ oraz $\varphi''(x) > 0$ w przedziałach: $(-\infty, -2), (-1, 0)$ oraz $(2, \infty)$ (są to przedziały wypukłości). Natomiast φ jest wklęsła w każdym z 2 przedziałów $(-2, -1)$ oraz (0,2), gdzie $\varphi''(x) < 0$. Mamy więc 5 punków charakterystycznych: $-2, -1, 0, 1, 2$ które uwzględnimy w pierwszym wierszu tabelki (dołączymy też $\pm\infty$). Tabelkę i wykres (przybliżony) badanej funkcji naszkicowałem na osobnej kartce, którą dołączam na końcu pliku z tym wykładem.

20 Funkcje pierwotne, całka nieoznaczona

Rachunek całkowy jest jednym z podstawowych narzędzi dla zastosowań matematyki. Jego geneza (w pracach Barrowa, Newtona i Leibniza)
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Barrow/ ,
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Newton.html [1],
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Leibniz.html)
związana była z tworzeniem opisu ilościowego zjawisk fizycznych. Na przykład, z rozwiązywaniem równań opisujących ruch. Badania związane z rozwojem rachunku całkowego dostarczały przełomowych odkryć w matematyce i ich zastosowań przez niemal 400 lat. Zanim przejdziemy do ciekawych z praktycznego punktu widzenia zagadnień (całka oznaczona, miara), poznamy podstawowe pojęcia umożliwiające znajdywanie takich całek -a mianowicie pojęcie funkcji pierwotnej i całki nieoznaczonej.

Definicja. Funkcję $F : D \to \mathbb{R}$ nazwiemy funkcją pierwotną dla funkcji f w zbiorze $D \subset D(f)$, jeśli F ma w każdym punkcie zbioru D pochodną oraz

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in D. \tag{3}$$

Całką nieoznaczoną z funkcji f nazywamy zbiór wszystkich funkcji pierwotnych (określonych na naturalnej dziedzinie funkcji f), oznaczany symbolem

$$\int f(x)\, dx.$$

Jeśli f ma w przedziale D funkcję pierwotną, to (jako pochodna tej funkcji) musi ona spełniać pewne warunki -na przykład osiągać wszystkie wartości pośrednie (Tw. Darboux), więc nie każda funkcja może mieć funkcję pierwotną. Jako ćwiczenie proponuję bezpośrednio sprawdzić, że funkcja, równa -1 dla $x \leqslant 0$ oraz $+1$ dla $x > 0$ nie ma funkcji pierwotnej w żadnym otoczeniu zera. Tym niemniej, wkrótce zobaczymy, że każda funkcja ciągła na przedziale ma w tym przedziale pierwotną.

Twierdzenie 2 *(i) Gdy F jest funkcją pierwotną dla f, zaś C- dowolną stałą, to $F + C$ też jest funkcją pierwotną dla f.*
(ii) Na odwrót, gdy F oraz G są funkcjami pierwotnymi dla tej samej funkcji w zbiorze D, to ich różnica jest stała na każdym przedziale zawartym w tym zbiorze D. (Mówimy wówczas, że $F - G$ jest **lokalnie stała** *w zbiorze D.)*

Zazwyczaj tezę (ii) wypowiadamy: *„funkcje pierwotne dla danej funkcji różnią się o stałą”*. Dla funkcji $\Phi = F - G$ stosujemy wzór na pochodną różnicy, stąd $(F - G)' = 0$. Ale należy pamiętać, że z zerowania się pochodnej funkcji Φ wynika jej stałość jedynie na przedziałach (tw. Lagrange'a). Na przykład, dla funkcji signum pierwotnymi w zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ są zarówno funkcje $F(x) = |x|$, jak i $G(x) = |x| + \mathrm{sgn}(x)$ -różniące się właśnie o $\mathrm{sgn}(x)$. Gdy F spełnia warunek (3), używamy zapisu

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C,$$

gdzie C nazywana „stałą całkowania” oznacza zbiór wszystkich możliwych stałych (a ściślej, funkcji lokalnie stałych) na dziedzinie f. W dalszym ciągu słowo „lokalnie” opuszczamy, pamiętając, jak należy rozumieć stałe w przypadku dziedziny będącej np. sumą pewnej ilości przedziałów otwartych parami rozłącznych.

[1] Epidemia jednej z najgroźniejszych chorób miała, co może zaskakiwać, istotny, pozytywny wpływ na pracę nankową Newtona. Przytoczę tu jeden cytat z tej strony www: ” Despite some evidence that his progress had not been particularly good, Newton was elected a scholar on 28 April 1664 and received his bachelor's degree in April 1665. It would appear that his scientific genius had still not emerged, but it did so suddenly when the plague closed the University in the summer of 1665 and he had to return to Lincolnshire. There, in a period of less than two years, while Newton was still under 25 years old, he began revolutionary advances in mathematics, optics, physics, and astronomy.”

Zauważmy na wstępie bardzo ważną własność, którą możemy określić jako **Liniowość całki nieoznaczonej**:

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx, \qquad \int \alpha f(x) = \alpha \int f(x).$$

Są to bezpośrednie wnioski z liniowości całki. Tu α oznacza stałą i odpowiednia równość mówi, że „*stałą można wyłączyć przed znak całki*". Należy tylko podkreślić, że suma całek rozumiana jest jako suma algebraiczna 2 zbiorów,

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

-tym razem są to zbiory funkcji, zaś dla $A = \{F + C_1 : C_1 \text{ −stała}\}, B = \{G + C_2 : C_2 \text{ −stała}\}$, możemy (traktując $C_1 + C_2$ jako nową stałą) zapisać w tym przypadku $A + B = \{F + G + C : C \text{ −stała}\}$. Aby nadać działaniom dodawania i mnożenia przez stałą precyzyjny sens, można odwołać się do pojęcia przestrzeni ilorazowej (zbioru klas abstrakcji względem relacji równości funkcji z dokładnością do składnika stałego). Jeśli wyjdziemy od przestrzeni (wektorowej) funkcji różniczkowalnych w przedziale D, otrzymamy strukturę przestrzeni wektorowej na zbiorze wspomnianych klas abstrakcji. Na szczęście, nie będziemy musieli korzystać z tak zaawansowanych pojęć, ograniczymy się do formalnych działań na stałych.

Naszym punktem wyjścia będzie znajomość podstawowych 9 pochodnych z funkcji elementarnych, które (po ewentualnym wykorzystaniu liniowości) prowadzą do listy podstawowych całek :

$$\int t^\beta\,dt = \frac{1}{1+\beta}t^{1+\beta} + C, \text{ gdy } \beta \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}, \qquad \int t^{-1}\,dt = \ln|t| + C,$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \text{ gdy } a \in (0,1)\cup(1,+\infty),$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C, \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C.$$

Do dyspozycji mamy ponadto dwa wzory wynikające bezpośrednio z zasad różniczkowania iloczynu (pozypomnijmy, $(FG)' = F'G + FG'$) oraz funkcji złożonej: $\frac{d}{dx}F(\phi(x)) = F'(\phi(x))\phi'(x)$. Są to następujące zasady:

Twierdzenie 3 Zasada całkowania przez części:

$$\int F'(x)G(x)\,dx = F(x)G(x) - \int F(x)G'(x)\,dx$$

Twierdzenie 4 Zasada całkowania przez podstawienie:

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = F(\phi(x)) + C, \quad \text{gdzie} \quad F(y) + C = \int f(y)\,dy.$$

Z pierwszej zasady korzystamy, gdy pod całką mamy iloczyn dwu funkcji, powiedzmy $u(x)g(x)$ takich, że po pierwsze potrafimy znaleźć całkę $F(x) = \int u(x)\,dx$, a po drugie, będziemy w stanie znaleźć (lub dalej przekształcić) całkę z iloczynu $F(x)g'(x)$.

Na przykład, w całce $\int xe^x\,dx$ możemy z łatwością znaleźć całki z czynników: $\int e^x = e^x + C$, $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$. Którą z tych całek powinniśmy przyjąć jako F? Spróbujmy na 2 sposoby: $F'(x) = e^x, G(x) = x$, to całkując przez części, mamy $\int xe^x\,dx = xe^x - \int F(x)G'(x)\,dx = xe^x - e^x$, gdyż $G'(x) = 1$. Drugi sposób będzie mniej skuteczny -przyjmując $F'(x) = x, G(x) = e^x$ mamy $\int xe^x\,dx = FG - \int FG'\,dx = \frac{1}{2}x^2e^x - \int \frac{1}{2}x^2e^x$ -zupełna porażka, gdyż wykładnik potęgi x zwiększa się o 1.