KRATY I ALGEBRY BANACHA

Marek Kosiek

Wykład monograficzny dla studentów Uniwersytetu Jagiellońskiego

Spis treści

Rozdział 1. Kraty Banacha 5
1. Kraty wektorowe 5
2. Operatory dodatnie 7
3. Granice i ciągłość w sensie porządku 10
4. Ideały porządkowe 13
5. Unormowane kraty wektorowe 17
6. Kraty Banacha z normą porządkowo ciągłą 22
7. Zespolone kraty Banacha 25
8. Rozszerzenia operatorów 28

Rozdział 2. Algebry Banacha 29
1. Widmo i rezolwenta 29
2. Przestrzeń ideałów maksymalnych 30
3. Przykłady algebr Banacha 32
4. Pewne własności analityczne i spektralne 33
5. Brzeg Szyłowa 36
6. Algebry funkcyjne 38
7. Przemienne C^*-algebry 39
8. Operatory normalne w przestrzeni Hilberta 41

Rozdział 3. Własności kratowe i algebraiczne $C(X)$ i przestrzeni do niej dualnej 45
1. Ideały algebraiczne i porządkowe w $C_{\mathbb{R}}(X)$ i w przestrzeni do niej dualnej 45
2. $M(X)$ jako dualna do algebry $C(X)$ 48
3. Rozkład Lebesgue'a i twierdzenie Radona-Nikodyma 52
4. Własności kratowe $C(X)$ a własności topologiczne zbioru X 54

Bibliografia 57

ROZDZIAŁ 1

Kraty Banacha

1. Kraty wektorowe

Znakiem $\geqslant$ będziemy oznaczać relację częściowego porządku tzn. relację spełniającą następujące warunki:

(1) **(Refleksywność)** $x \geqslant x\ \forall x$.
(2) **(Antysymetria)** $x \geqslant y,\ y \geqslant x \implies x = y$.
(3) **(Tranzytywność)** $x \geqslant y,\ y \geqslant z \implies x \geqslant z$.

Oznaczenia:

(1) $x \leqslant y \overset{\text{df}}{\iff} y \geqslant x$
(2) $x > y \overset{\text{df}}{\iff} y < x \overset{\text{df}}{\iff} x \geqslant y,\ x \neq y$

Rzeczywista przestrzeń wektorowa X nazywamy **przestrzenią wektorową z porządkiem** lub **przestrzenią liniową częściowo uporządkowaną** (w skrócie **l.c.u.**), jeżeli jest w niej określona relacja częściowego porządku $\geqslant$ kompatybilna z jej strukturą algebraiczną t.j. spełniająca warunki:

(a) $x \geqslant y \implies x + z \geqslant y + z \quad \forall z \in X$.
(b) $x \geqslant y, \implies \alpha x \geqslant \alpha y \quad \forall \alpha \geqslant 0$.

Stwierdzenie 1.1. *Wtedy*

(a') $x \leqslant y \implies -x \geqslant -y$.
(b') $x \leqslant y,\ \alpha < 0 \implies \alpha x \geqslant \alpha y$.
(c') $x \geqslant 0,\ \alpha \leqslant \beta \implies \alpha x \leqslant \beta x$.

Dowód. $x \leqslant y \implies -y = x - y - x \leqslant y - y - x = -x \implies$ (a'); (a'),(2) $\implies$ (b'); (a),(b) $\implies$ (c'). □

Jeżeli X l.c.u., to zbiór $X^+ := \{x \in X : x \geqslant 0\}$ nazywamy **stożkiem dodatnim**. Ma on następujące własności:

(i) $X^+ + X^+ \subset X^+$.
(ii) $\alpha X^+ \subset X^+ \quad \forall \alpha \geqslant 0$.
(iii) $X^+ \cap (-X^+) = \{0\}$.

Dowód. (a) $\implies$ (i); (b) $\implies$ (ii); (2) $\implies$ (iii);. □

Podzbiór K rzeczywistej przestrzeni wektorowej X jest stożkiem, jeżeli

(j) $K + K \subset K$.
(jj) $\alpha K \subset K \quad \forall \alpha \geqslant 0$.
(jjj) $K \cap (-K) = \{0\}$.

Stwierdzenie 1.2. *Wtedy X z relacją $x \leqslant y \overset{df}{\iff} y - x \in K$ jest przestrzenią l.c.u.*

Dowód. - Ćwiczenie. $\square$

Jeżeli K jest stożkiem w X, to Lin $K = K - K$. Stożek K nazywa się **reprodukujący**, jeżeli $X = K - K$.

Stwierdzenie 1.3. *Stożek K jest reprodukujący w X w.t.w., gdy dla dowolnych $x, y \in X$ istnieje $z \in K$ takie, że $z \geqslant x$ i $z \geqslant y$.*

Dowód. - Ćwiczenie. $\square$

Definicja 1.4. L.c.u. przestrzeń E jest **kratą wektorową** (inaczej **przestrzenią Riesza**) jeżeli

$$\forall\, x, y \in E \quad \exists\, x \vee y := \sup\{x, y\}, \quad \exists\, x \wedge y := \inf\{x, y\}.$$

Definicja 1.5.

$$x^+ := x \vee 0, \quad x^- := (-x) \vee 0, \quad |x| := x^+ + x^-.$$

Elementy x, y są **rozłączne**, jeżeli $|x| \wedge |y| = 0$.

Wniosek 1.6. *Jeżeli E jest kratą wektorową, to dla $x, y, x_1, y_1 \in E$ oraz $\lambda \in \mathbb{R}$ zachodzi*

(1) $x = x^+ - x^-$,
(2) $|x| = 0 \iff x = 0; \quad |\lambda x| = |\lambda||x|, \quad |x + y| \leqslant |x| + |y|$,
(3) $x + y = x \vee y + x \wedge y$,
(4) $|x - y| = x \vee y - x \wedge y$,
(5) $|x \vee y - x_1 \vee y_1| \leqslant |x - x_1| + |y - y_1|$,
(6) $|x \wedge y - x_1 \wedge y_1| \leqslant |x - x_1| + |y - y_1|$
(7) $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$,
(8) $x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$,
(9) $|x| \vee |y| = \frac{1}{2}(|x + y| + |x - y|)$,
(10) $|x| \wedge |y| = \frac{1}{2}|(|x + y| - |x - y|)|$,
(11) *Wzór (1) jest jedyną reprezentacją x jako różnicy dwóch dodatnich rozłącznych elementów E.*
(12) *Elementy x, y są rozłączne wtedy i tylko wtedy, gdy $|x + y| = |x - y|$.*
(13) $x \leqslant y \iff (x^+ \leqslant y^+,\ y^- \leqslant x^-)$.
(14) *x rozłączne z y* $\implies |x| \vee |y| = |x| + |y| = |x + y|,\ (x + y)^+ = x^+ + y^+$.
(15) $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset E,\ \{y_\beta\}_{\beta \in B} \subset E,\ x = \sup_\alpha x_\alpha,\ y = \inf_\beta y_\beta\ z \in E \implies x \wedge z = \sup_\alpha(x_\alpha \wedge z),\ y \vee z = \inf_\beta(y_\beta \vee z)$.

Dowód. - Ćwiczenie. $\square$

Stwierdzenie 1.7. *Elementy x^+, x^- są rozłączne oraz $|x| = x \vee (-x)$.*

Dowód. Korzystamy ze wzoru $z \wedge y = z + (y - z) \wedge 0$, który wynika z niezmienniczości relacji $\geqslant$ względem translacji (a). Stąd dla $z = x^-, y = x^+$ mamy $x^+ \wedge x^- = x^- + x \wedge 0 = x^- - (-x) \vee 0 = x^- - x^- = 0$, a zatem x^+, x^- są rozłączne.

Korzystając teraz z punktu (3) poprzedniego wniosku i rozłączności x^+, x^- mamy $|x| = x^+ + x^- = x^+ \vee x^- + x^+ \wedge x^- = x^+ \vee x^- = x \vee 0 \vee (-x) \vee 0 = x \vee (-x) \vee 0$. Ponieważ $x \vee (-x) \geqslant x$ i $x \vee (-x) \geqslant -x$, więc z niezmienniczości relacji $\geqslant$ względem translacji (a) mamy $x \vee (-x) - x \geqslant 0$ i $x \vee (-x) + x \geqslant 0$, skąd po dodaniu nierówności stronami otrzymujemy $x \vee (-x) \geqslant 0$. Zatem $|x| = x \vee (-x)$. □

Definicja 1.8. Krata wektorowa jest

- **zupełna w sensie Dedekinda** (inaczej **porządkowo zupełna**) jeżeli jej każdy niepusty podzbiór ograniczony z góry ma kres górny,
- σ**-zupełna w sensie Dedekinda** (inaczej σ**-porządkowo zupełna**) jeżeli jej każdy niepusty przeliczalny podzbiór ograniczony z góry ma kres górny.

2. Operatory dodatnie

Definicja 2.1. Operator liniowy $T : X \to Y$ pomiędzy dwoma przestrzeniami l.c.u. nazywamy

(1) **dodatnim** (ozn. $T \geqslant 0$), gdy $Tx \geqslant 0\ \forall x \geqslant 0$;
(2) **ściśle dodatnim**, gdy $Tx > 0\ \forall x > 0$;
(3) **regularnym**, gdy T jest różnicą dwóch operatorów dodatnich.

Podzbiór $A \subset X$ l.c.u. nazywamy **porządkowo ograniczonym**, jeżeli istnieją $x, y \in X$ takie, że $x \leqslant a \leqslant y$ dla każdego $a \in A$.

Definicja 2.2. Operator liniowy $T : X \to Y$ pomiędzy dwoma przestrzeniami l.c.u. nazywamy **porządkowo ograniczonym** jeżeli $T(A)$ jest porządkowo ograniczony dla każdego porządkowo ograniczonego zbioru A.

$\mathcal{L}_{\mathbf{r}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ - przestrzeń operatorów regularnych
$\mathcal{L}_{\mathbf{b}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ - przestrzeń operatorów porządkowo ograniczonych

Stwierdzenie 2.3. *$\mathcal{L}_r(X, Y) \subset \mathcal{L}_b(X, Y)$.*

Definicja 2.4. przestrzeń l.c.u. Y nazywamy **archimedesową**, jeżeli dla $x \in Y$ spełniona jest implikacja $nx \leqslant y\ \forall\ n \implies x \leqslant 0$.

Twierdzenie 2.5. *(Kantorowicz) Niech X, Y będą przestrzeniami l.c.u. i niech $T : X^+ \to Y^+$ będzie odwzorowaniem addytywnym tzn. $T(x + y) = T(x) + T(y)$ dla $x, y \in X^+$. Jeżeli stożek dodatni X jest generujący, a Y jest archimedesowa, to T rozszerza się jednoznacznie do operatora dodatniego z X do Y. Oznaczając to rozszerzenie przez $\hat{T}$, otrzymujemy:*

$$\hat{T}x = Tx_1 - Tx_2, \tag{2.1}$$

gdzie $x = x_1 - x_2$ jest dowolną reprezentacją x w postaci różnicy dwóch dodatnich wektorów.

Dowód. Zaobserwujmy, że jeżeli $x = x_1 - x_2 = y_1 - y_2$ dla $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$, to $x_1 + y_2 = y_1 + x_2$, a więc z addytywności T dostajemy

$$Tx_1 + Ty_2 = T(x_1 + y_2) = T(y_1 + x_2) = Ty_1 + Tx_2.$$

Stąd $Tx_1 - Tx_2 = Ty_1 - Ty_2$, a więc $\hat{T}$ jest dobrze określony. Z (2.1) wynika bezpośrednio, że $\hat{T}x = Tx \geqslant 0$ dla $x \in X^+$ oraz $\hat{T}(-x) = -\hat{T}x$ dla $x \in X$. Następnie zweryfikujemy liniowość $\hat{T}$.

Dla dowodu addytywności $\hat{T}$ niech $x = x_1 - x_2$ oraz $y = y_1 - y_2$, gdzie $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X^+$. Wtedy

$$\begin{aligned}\hat{T}(x+y) &= \hat{T}(x_1 + y_1 - (x_2 + y_2)) = T(x_1 + y_1) - T(x_2 + y_2)\\ &= Tx_1 + Ty_1 - Tx_2 - Ty_2 = (Tx_1 - Tx_2) + (Ty_1 - Ty_2)\\ &= \hat{T}x + \hat{T}y.\end{aligned}$$

Z addytywności w szczególności wynika równość $\hat{T}(rx) = r\hat{T}(x)$ dla r wymiernych i $x \in X$. Dla homogeniczności $\hat{T}$ potrzebujemy dwóch własności:

(i) T jest monotoniczny na X^+, tzn. zachodzi następująca implikacja $0 \leqslant x \leqslant y \implies Tx \leqslant Ty$.

(ii) Niech Z będzie archimedesową przestrzenią l.c.u. i niech $x \in Z^+$ oraz $y \in Z$. Niech $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{R}$ oraz $\alpha_n \to \alpha$. Jeżeli $\alpha_n x \leqslant y$ (odp. $y \leqslant \alpha_n x$) dla każdego n, to $\alpha x \leqslant y$ (odp. $y \leqslant \alpha x$).

Dla dowodu (i) zauważmy, że gdy $0 \leqslant x \leqslant y$, to $Ty = T(x+(y-x)) = Tx + T(y-x) \geqslant Tx$.

Dla dowodu (ii) ustalmy k. Wtedy dla wszystkich dostatecznie dużych n mamy $\alpha - \alpha_n \leqslant \frac{1}{k}$, a więc $(\alpha - \alpha_n)x \leqslant \frac{1}{k}x$ dla dostatecznie dużych n. Stąd $\alpha x - y \leqslant \alpha x - \alpha_n x \leqslant \frac{1}{k}x$, czyli $k(\alpha x - y) \leqslant x$ dla każdego k. Ponieważ X jest archimedesowa, więc $\alpha x - y \leqslant 0$ czyli $\alpha x \leqslant y$.

Niech teraz $x \in X^+$ i $\alpha > 0$. Wybierzmy teraz dwa ciągi liczb wymiernych $\{r_n\}$ i $\{s_n\}$ takie, że $r_n \uparrow \alpha$ i $s_n \downarrow \alpha$. Korzystając z (i) oraz homogeniczności T dla liczb wymiernych, dostajemy

$$r_n Tx = T(r_n x) \leqslant T(\alpha x) \leqslant T(s_n x) = s_n Tx.$$

Stąd, na mocy (ii), $\alpha Tx \leqslant T(\alpha x) \leqslant \alpha Tx$ czyli $\alpha Tx = T(\alpha x)$.

Na koniec ustalmy $\alpha \geqslant 0$ i $x = x_1 - x_2 \in X$, gdzie $x_1, x_2 \in X^+$. Wtedy

$$\hat{T}(\alpha x) = \hat{T}(\alpha x_1 - \alpha x_2) = T(\alpha x_1) - T(\alpha x_2) = \alpha(Tx_1 - Tx_2) = \alpha \hat{T}x,$$
$$\hat{T}(-\alpha x) = \hat{T}(\alpha x_2 - \alpha x_1) = T(\alpha x_2) - T(\alpha x_1) = \alpha(Tx_2 - Tx_1) = (-\alpha)\hat{T}x.$$

Czyli $\hat{T}$ jest homogeniczny, a więc również liniowy. □

Lemat 2.6. *Krata wektorowa porządkowo zupełna jest archimedesowa.*

Dowód. - Ćwiczenie. □

Lemat 2.7. *Jeżeli X jest kratą wektorową, $u, v, y \in X$ oraz $0 \leqslant y \leqslant u + v$, to istnieją $y_1, y_2 \in X$ takie, że $y = y_1 + y_2$ oraz $0 \leqslant y_1 \leqslant u$, $0 \leqslant y_2 \leqslant v$.*

Dowód. Połóżmy $y_1 := y \wedge u$, $y_2 := y - y \wedge u$. Wtedy $0 \leqslant y_1 \leqslant u$, $0 \leqslant y_2$ oraz

$$\left.\begin{aligned} y \leqslant u + v &\implies y - v \leqslant u \\ v \geqslant 0 &\implies y - v \leqslant y \end{aligned}\right\} \implies y - v \leqslant y \wedge u \implies y_2 = y - y \wedge u \leqslant v.$$

□

TWIERDZENIE 2.8. *(F. Riesz - Kantorowicz) Jeżeli E, F są kratami wektorowymi, przy czym F jest porządkowo zupełna, to $\mathcal{L}_r(E,F)$ jest porządkowo zupełną kratą wektorową oraz $\mathcal{L}_r(E,F) = \mathcal{L}_b(E,F)$. Ponadto*

(1) $T^+x = \sup\{Ty : 0 \leqslant y \leqslant x\}$,
(2) $T^-x = \sup\{-Ty : 0 \leqslant y \leqslant x\}$,
(3) $|T|x = \sup\{Ty : -x \leqslant y \leqslant x\}$

dla $T \in \mathcal{L}_r(E,F)$, $x \in E^+$.

DOWÓD. Zdefiniujmy odwzorowanie $R : E^+ \to F^+$ następująco:

$$Rx = \sup_{0 \leqslant y \leqslant x} Ty.$$

Ponieważ F jest porządkowo zupełna, a T porządkowo ograniczony, więc R jest dobrze określone. Wykażemy, że R jest addytywne.

Niech $u, v \in E^+$, $0 \leqslant y \leqslant u$ i $0 \leqslant z \leqslant v$. Wtedy $0 \leqslant y + z \leqslant u + v$, skąd $Ty + Tz = T(y + z) \leqslant R(u + v)$. Po przejściu do supremów po lewej stronie otrzymujemy $Ru + Rv \leqslant R(u + v)$. Aby wykazać przeciwną nierówność załóżmy $0 \leqslant y \leqslant u + v$. Z lematu (2.7) wynika, że istnieją $0 \leqslant y_1 \leqslant u$, $0 \leqslant y_2 \leqslant v$ takie, że $y = y_1 + y_2$ oraz $Ty = Ty_1 + Ty_2 \leqslant Ru + Rv$. Stąd $R(u + v) \leqslant Ru + Rv$, a zatem $R(u + v) = Ru + Rv$, co oznacza, że R jest addytywne.

Na mocy twierdzenia 2.5 (Kantorowicza) odwzorowanie R posiada jedyne liniowe, dodatnie rozszerzenie $\hat{R} : E \to F$. Aby zakończyć dowód powinniśmy wykazać równość $\hat{R} = T^+$.

Zauważmy najpierw, że $Tx \leqslant \hat{R}x$ dla $x \in E^+$, a więc $T \leqslant \hat{R}$. Weźmy teraz dowolny operator $Q \in \mathcal{L}_b(E,F)$ spełniający nierówności $Q \geqslant 0$ i $Q \geqslant T$. Jeżeli $x \in E^+$, to dla każdego $0 \leqslant y \leqslant x$ mamy $Ty \leqslant Qy \leqslant Qx$, a więc $\hat{R}x = \sup_{0 \leqslant y \leqslant x} Ty \leqslant Qx$. Stąd $Q \geqslant \hat{R}$. Zatem $\hat{R}$ jest równy supremum elementów T i 0 w $\mathcal{L}_b(E,F)$. Czyli $T^+ = T \vee 0 = \hat{R}$. Wykazaliśmy równocześnie istnienie w $\mathcal{L}_b(E,F)$ supremum dowolnego elementu i zera.

Równość (2) wynika z równości $T^- = (-T)^+$, a równość (3) z (1) i (2). Z istnienia T^+ i T^- dla każdego $T \in \mathcal{L}_b(E,F)$ wynika istnienie supremum i infimum dwóch dowolnych elementów $\mathcal{L}_b(E,F)$, a zatem $\mathcal{L}_b(E,F)$ jest kratą wektorową. Z równości $T = T^+ - T^-$ dla każdego $T \in \mathcal{L}_b(E,F)$ wynika równość $\mathcal{L}_r(E,F) = \mathcal{L}_b(E,F)$.

Dowód porządkowej zupełności $\mathcal{L}_b(E,F)$ - ćwiczenie. □

WNIOSEK 2.9. *Jeżeli E, F są porządkowo zupełnymi kratami wektorowymi, to*

(1) $(S \vee T)x = \sup\{Sy + Tz : \ y, z \in E^+, \ y + z = x\}$,
(2) $(S \wedge T)x = \inf\{Sy + Tz : \ y, z \in E^+, \ y + z = x\}$

dla $S, T \in \mathcal{L}_r(E,F)$, $x \in E^+$.

Stosując punkt (3) Twierdzenia 2.8 Riesza-Kantorowicza oraz Stwierdzenie 1.7 otrzymujemy:

STWIERDZENIE 2.10. *$|T| = T \vee (-T)$ oraz $|T||x| \geqslant |Tx|$ dla $x \in E$, $T \in \mathcal{L}_b(E,F)$.*

DOWÓD. Na mocy punktu (3) Twierdzenia 2.8, $|T||x| = \sup\{Ty : -|x| \leqslant y \leqslant |x|\}$. Stąd $|T||x| \geqslant Tx$ i $|T||x| \geqslant T(-x) = -Tx$. □

Twierdzenie 2.11. *(Abramowicz) Jeżeli E, F są porządkowo zupełnymi kratami wektorowymi, to*

(1) $T^+x = \sup\{Ty : \; y \in E, \; y \wedge (x-y) = 0\}$,
(2) $T^-x = \sup\{-Ty : \; y \in E, \; y \wedge (x-y) = 0\}$,
(3) $|T|x = \sup\{Ty - T(x-y) : \; y \in E, \; y \wedge (x-y) = 0\}$

dla $T \in \mathcal{L}_r(E,F)$, $x \in E^+$.

3. Granice i ciągłość w sensie porządku

Definicja 3.1. Ciąg uogólniony $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ zbiorze częściowo uporządkowanym jest **malejący** - ozn. $x \downarrow$ (**rosnący**- ozn. $x \uparrow$), jeżeli dla $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$ mamy $x_{\alpha_1} \geqslant x_{\alpha_2}$ ($x_{\alpha_1} \leqslant x_{\alpha_2}$). Oznaczamy

$$x_\alpha \downarrow x \overset{\text{df}}{\iff} x_\alpha \downarrow \; \text{oraz } x = \inf\{x_\alpha\}$$
$$x_\alpha \uparrow x \overset{\text{df}}{\iff} x_\alpha \uparrow \; \text{oraz } x = \sup\{x_\alpha\}$$

Definicja 3.2. Ciąg uogólniony $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ w zbiorze częściowo uporządkowanym jest **porządkowo zbieżny** (**zbieżny w sensie porządku**) do elementu x, ozn. $x_\alpha \xrightarrow{o} x$, jeżeli istnieją dwa ciągi uogólnione $\{y_\beta\}_{\beta \in B}$, $\{z_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ takie, że

(1) $y_\beta \uparrow x, \; z_\gamma \downarrow x$,
(2) $\forall \; \beta \in B \; \forall \; \gamma \in \Gamma \; \exists \alpha_0 \in A \; : \; y_\beta \leqslant x_\alpha \leqslant z_\gamma \; \forall \; \alpha \geqslant \alpha_0$.

Element x nazywamy **granicą porządkową** (**granicą w sensie porządku**) ciągu uogólnionego $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

W definicji zbieżności porządkowej możemy przyjąć, że zbiór indeksów B równa się Γ. W tym celu wystarczy przyjąć $\Lambda := B \times \Gamma$ i zdefiniować nowe ciągi uogólnione $\{u_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ $\{v_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ w następujący sposób:

$$u_\lambda := y_\beta, \; v_\lambda := z_\gamma \quad \forall \; \lambda := (\beta, \gamma) \in \Lambda.$$

Wtedy w definicji zbieżności porządkowej można zastąpić ciągi $\{y_\beta\}_{\beta \in B}$, $\{z_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ przez $\{u_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ $\{v_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. - Ćwiczenie

Jak jest wtedy określony częściowy porządek w $B \times \Gamma$?

Ćwiczenie 3.3.

(1) Ciąg uogólniony w zbiorze częściowo uporządkowanym może mieć conajwyżej jedną granicę porządkową.
(2) Jeżeli $x_\alpha \uparrow x$ lub $x_\alpha \downarrow x$, to $x_\alpha \xrightarrow{o} x$.
(3) Jeżeli $x_\alpha \uparrow$ (odp. $x_\alpha \downarrow$) i $x_\alpha \xrightarrow{o} x$, to $x_\alpha \uparrow x$ (odp. $x_\alpha \downarrow x$).

Lemat 3.4. *Niech E będzie kratą wektorową, a $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ciągiem uogólnionym w E. Wtedy*

(a) *Jeżeli istnieje ciąg uogólniony $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ (z tym samym indeksem) taki, że $u_\alpha \downarrow 0$ i $|x_\alpha - x| \leqslant u_\alpha \; \forall \; \alpha \in A$, to $x_\alpha \xrightarrow{o} x$.*
(b) *Jeżeli E jest porządkowo zupełna i $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ jest porządkowo ograniczony, to $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg uogólniony $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ (z tym samym indeksem) taki, że $u_\alpha \downarrow 0$ i $|x_\alpha - x| \leqslant u_\alpha \; \forall \; \alpha \in A$.*

Dowód. (a) Załóżmy, że istnieje ciąg uogólniony $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ taki, że $u_\alpha \downarrow 0$ i $|x_\alpha - x| \leqslant u_\alpha$ $\forall\ \alpha \in A$. Niech $y_\alpha := x - u_\alpha$ i $z_\alpha := x + u_\alpha$. Wtedy $y_\alpha \uparrow x$, $z_\alpha \downarrow x$ oraz $y_\alpha \leqslant x_\alpha \leqslant z_\alpha$ $\forall\ \alpha \in A$. Stąd $x_\alpha \xrightarrow{o} x$.

(b) Z założenia E jest porządkowo zupełna i $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ jest porządkowo ograniczony, to $x_\alpha \xrightarrow{o} x$. Weźmy dwa ciągi uogólnione $\{y_\beta\}_{\beta\in B}$ i $\{z_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ dla których $y_\beta \uparrow x$, $z_\gamma \downarrow x$ i takie, że dla każdego $\beta \in B$, $\gamma \in \Gamma$ istnieje $\alpha(\beta,\gamma) \in A$ spełniające warunek $y_\beta \leqslant x_\alpha \leqslant z_\gamma$ $\forall\ \alpha \geqslant \alpha(\beta,\gamma)$. Dla każdego $\alpha \in A$ zdefiniujmy

$$v_\alpha := \inf_{\alpha'\geqslant\alpha} x_{\alpha'}, \quad w_\alpha := \sup_{\alpha'\geqslant\alpha} x_{\alpha'}.$$

Powyższe kresy istnieją, gdyż $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ jest porządkowo ograniczony, a E porządkowo zupełna. Z tego samego powodu istnieją $v := \sup v_\alpha$ i $w := \inf w_\alpha$ oraz $v_\alpha \uparrow v$, $w_\alpha \downarrow w$. Ponieważ $y_\beta \leqslant x_{\alpha'} \leqslant z_\gamma$ dla $\alpha' \geqslant \alpha(\beta,\gamma)$, więc $y_\beta \leqslant v_\alpha \leqslant z_\gamma$ dla $\alpha \geqslant \alpha(\beta,\gamma)$. Stąd $y_\beta \leqslant v \leqslant z_\gamma$ dla $\beta \in B$, $\gamma \in \Gamma$. Stąd, ponieważ $y_\beta \uparrow x$ i $z_\gamma \downarrow x$, więc $v = x$. Podobnie $w_\alpha \downarrow x$. Dla dokończenia dowodu zauważmy, że $x \geqslant v_\alpha$, ponieważ $v_\alpha \uparrow x$, a z definicji $w_\alpha \geqslant x_\alpha$, zatem $x_\alpha - x \leqslant w_\alpha - v_\alpha$. Podobnie $w_\alpha \geqslant x$, ponieważ $w_\alpha \downarrow x$, a z definicji $v_\alpha \leqslant x_\alpha$, zatem $x - x_\alpha \leqslant w_\alpha - v_\alpha$. Stąd na mocy Stwierdzenia 1.7, $|x_\alpha - x| \leqslant w_\alpha - v_\alpha$. □

Wniosek 3.5. *Jeżeli E jest σ-porządkowo zupełną kratą wektorową, a $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ciągiem w E, to $x_n \xrightarrow{o} x$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in E$ taki, że $u_n \downarrow 0$ i $|x_n - x| \leqslant u_n$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$.*

Dowód. - Ćwiczenie. □

Lemat 3.6. *Niech E będzie kratą wektorową, a $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ciągiem uogólnionym w E. Ciąg x_α jest porządkowo zbieżny do $x \in E$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg uogólniony $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ taki, że $u_\lambda \downarrow 0$ i dla każdego $\lambda \in \Lambda$ istnieje α_0 takie, że $|x_\alpha - x| \leqslant u_\lambda$ $\forall\ \alpha \geqslant \alpha_0$.*

Dowód. - Ćwiczenie. □

W ogólnym przypadku zbieżność porządkową ciągów definiujemy w następujący sposób (definicja ta nie jest na ogół szczególnym przypadkiem Definicji 3.2):

Definicja 3.7. Ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ w zbiorze częściowo uporządkowanym jest **porządkowo zbieżny** (**zbieżny w sensie porządku**) do elementu x, ozn. $x_n \xrightarrow{o} x$, jeżeli istnieją dwa ciągi $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ takie, że $y_n \uparrow x$, $z_n \downarrow x$ i $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$ $\forall n$.

Lemat 3.8. *Jeżeli E jest kratą wektorową, a $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ciągiem w E, to $x_n \xrightarrow{o} x$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in E$ taki, że $u_n \downarrow 0$ i $|x_n - x| \leqslant u_n$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$.*

Definicja 3.9. Podzbiór D zbioru częściowo uporządkowanego nazywamy **porządkowo domkniętym** (odp. **σ-porządkowo domkniętym**), jeżeli $(\{x_\alpha\} \subset D,\ x_\alpha \xrightarrow{o} x \implies x \in D)$, odp. $(\{x_n\} \subset D,\ x_n \xrightarrow{o} x \implies x \in D)$.

Definicja 3.10. Odwzorowanie $f : X \to Y$ pomiędzy częściowo uporządkowanymi zbiorami X, Y jest

(1) **σ-porządkowo ciągłe** jeżeli dla $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mamy implikację $x_n \xrightarrow{o} x \implies f(x_n) \xrightarrow{o} f(x)$.
(2) **porządkowo ciągłe** jeżeli dla $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ mamy implikację $x_\alpha \xrightarrow{o} x \implies f(x_\alpha) \xrightarrow{o} f(x)$.

Stwierdzenie 3.11. *W kratach wektorowych operacje kratowe są porządkowo ciągłe.*

Dowód. - Ćwiczenie w oparciu o Lemat 3.6. □

Lemat 3.12. *Operator dodatni $T : X \to Y$ pomiędzy dwoma przestrzeniami l.c.u. jest porządkowo ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy dla $\{x_\alpha\} \subset X$ mamy $x_\alpha \downarrow 0 \implies Tx_\alpha \downarrow 0$.*

Operator dodatni $T : X \to Y$ pomiędzy dwoma przestrzeniami l.c.u. jest σ-porządkowo ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy dla $\{x_n\} \subset X$ mamy $x_n \downarrow 0 \implies Tx_n \downarrow 0$.

Dowód. - Ćwiczenie. □

Twierdzenie 3.13. *Zakładamy, że E, F są kratami wektorowymi, przy czym F jest porządkowo zupełna oraz, że $T : E \to F$ jest porządkowo ograniczony. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(1) *T jest porządkowo ciągły.*
(2) $x_\alpha \downarrow 0 \implies Tx_\alpha \xrightarrow{o} 0$.
(3) $x_\alpha \downarrow 0 \implies \inf_\alpha |Tx_\alpha| = 0$.
(4) *T^+ i T^- są porządkowo ciągłe.*
(5) *$|T|$ jest porządkowo ciągły.*

Dowód. (1) $\implies$ (2) $x_\alpha \downarrow 0 \implies x_\alpha \xrightarrow{o} 0 \implies Tx_\alpha \xrightarrow{o} 0$.

(2) $\implies$ (3) Załóżmy $x_\alpha \downarrow 0$ i że istnieje $y \in F$ takie, że $y \leqslant |Tx_\alpha|$ dla każdego α. Ponieważ $Tx_\alpha \xrightarrow{o} 0$, zatem od pewnego miejsca począwszy jest porządkowo ograniczony, a więc na mocy Lematu 3.4 istnieje ciąg uogólniony $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ taki, że $u_\alpha \downarrow 0$ i $|Tx_\alpha| \leqslant u_\alpha \ \forall\ \alpha$. Stąd $y \leqslant |Tx_\alpha| \leqslant u_\alpha$, a zatem $y \leqslant u_\alpha$ dla każdego $\alpha \in A$. Z warunku $u_\alpha \downarrow 0$ dostajemy $y \leqslant 0$. Stąd $\inf_\alpha |Tx_\alpha| = 0$.

(3) $\implies$ (4) Wystarczy dowieść, że T^+ jest porządkowo ciągły. W tym celu załóżmy, że $x_\alpha \downarrow 0$ w E. Niech $0 \leqslant u \leqslant T^+x_\alpha$ dla każdego α. Ponieważ T^+ jest dodatni, więc ciąg T^+x_α jest malejący. Zatem na mocy Lematu 3.12 wystarczy wykazać, że $u = 0$.

Ustalmy indeks α_0 i przyjmijmy $x := x_{\alpha_0}$. Weźmy dowolny y taki, że $0 \leqslant y \leqslant x$ oraz $\alpha_1 \geqslant \alpha$ takie, że $y \geqslant x_\alpha$ dla $\alpha \geqslant \alpha_1$. Wtedy dla $\alpha \geqslant \alpha_1$ mamy $0 \leqslant y - x_\alpha = y \wedge x - x_\alpha \leqslant x - x_\alpha$. Stąd

$$Ty - T(x_\alpha) = T(y - x_\alpha) \leqslant T^+(x - x_\alpha) = T^+x - T^+x_\alpha,$$

a w konsekwencji

$$0 \leqslant u \leqslant T^+x_\alpha \leqslant T^+x + |Tx_\alpha| - Ty \tag{3.1}$$

dla $\alpha \geqslant \alpha_1$. Ponieważ $x_\alpha \downarrow 0$, więc na mocy (3), $\inf_{\alpha\geqslant\alpha_1} |Tx_\alpha| = 0$. Z nierówności (3.1) wynika zatem nierówność $0 \leqslant u \leqslant T^+x - Ty$ dla $0 \leqslant y \leqslant x$. Ale z Twierdzenia 2.8 Riesza-Kantorowicza mamy równość $T^+x = \sup_{0\leqslant y\leqslant x} Ty$, skąd $u = 0$.

(4) $\implies$ (5) - oczywiste.

(5) $\implies$ (1) Niech $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ w E. Wybierzmy dwa ciągi uogólnione $\{y_\beta\}_{\beta\in B}$, $\{z_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ takie, że $y_\beta \uparrow 0$, $z_\gamma \downarrow 0$ oraz takie, że dla każdego $\beta \in B, \gamma \in \Gamma$ istnieje $\alpha(\beta,\gamma) \in A$ spełniające warunek $y_\beta \leqslant x_\alpha \leqslant z_\gamma$ dla $\alpha \geqslant \alpha(\beta,\gamma)$. Wtedy $x_\alpha^+ \leqslant z_\gamma^+ = z_\gamma$ i $x_\alpha^- \leqslant y_\beta^- = -y_\beta$, skąd $x_\alpha^+ + x_\alpha^- = |x_\alpha| \leqslant z_\gamma - y_\beta$ dla $\alpha \geqslant \alpha(\beta,\gamma)$.

Jeżeli przyjmiemy $\Lambda := B \times \Gamma$ i dla każdego $\lambda = (\beta,\gamma)$ zdefiniujemy $u_\lambda := z_\gamma - y_\beta \geqslant 0$, to na mocy Stwierdzenia 2.10, nierówność $|Tx_\alpha| \leqslant |T|(u_\lambda)$ zachodzi dla $\alpha \geqslant \alpha(\beta,\gamma) =$

$\alpha(\lambda)$. Ponieważ $u_\lambda \downarrow 0$, więc ciągłość porządkowa $|T|$ implikuje $|T|(u_\lambda) \downarrow 0$, a stąd $Tx_\alpha \xrightarrow{o} 0$, co kończy dowód. □

Analogiczny wynik dla σ-porządkowo ciągłych operatorów jest następujący:

Twierdzenie 3.14. *Zakładamy, że E, F są kratami wektorowymi, przy czym F jest porządkowo zupełna oraz, że $T : E \to F$ jest porządkowo ograniczony. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(1) *T σ-jest porządkowo ciągły.*
(2) $x_n \downarrow 0 \implies Tx_n \xrightarrow{o} 0$.
(3) $x_n \downarrow 0 \implies \inf_n |Tx_n| = 0$.
(4) *T^+ i T^- są σ-porządkowo ciągłe.*
(5) *$|T|$ jest σ-porządkowo ciągły.*

Definicja 3.15. Operator dodatni $T : E \to F$ pomiędzy kratami wektorowymi nazywamy **homomorfizmem kratowym**, jeżeli $T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$.

Twierdzenie 3.16. *Jeżeli $T : E \to F$ jest operatorem dodatnim pomiędzy kratami wektorowymi, to następujące warunki są równoważne:*

(1) *T jest homomorfizmem kratowym.*
(2) $T(x^+) = (Tx)^+ \quad \forall\, x \in E$.
(3) $T(x \wedge y) = T(x) \wedge T(y) \quad \forall\, x, y \in E$.
(4) $|Tx| = T|x| \quad \forall\, x \in E$.
(5) $\forall\, x, y \in E : \quad x \wedge y = 0 \implies Tx \wedge Ty = 0$.

4. Ideały porządkowe

Definicja 4.1. Mówimy, że podzbiór A kraty wektorowej E jest **solidny**, gdy zachodzi implikacja

$$x \in E,\ y \in A,\ |x| \leqslant |y| \implies x \in A.$$

Podprzestrzeń kraty wektorowej, która jest solidna nazywamy **ideałem porządkowym**. Najmniejszy (ze względu na inkluzję) ideał zawierający niepusty zbiór A nazywamy **ideałem generowanym przez** A i oznaczamy E_A.

Stwierdzenie 4.2. *Ideał porządkowy jest podkratą wektorową.*

Stwierdzenie 4.3.

$$E_A = \{x \in E : \exists x_1, \dots, x_n \in A,\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+ : |x| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |x_i|\}.$$

Definicja 4.4. Jeżeli $A = \{x\}$, to $E_x := E_{\{x\}}$ nazywamy **ideałem głównym** generowanym przez x.

Stwierdzenie 4.5.

$$E_x = \{y \in E : \exists\ \lambda > 0 : |y| \leqslant \lambda |x|\}.$$

Definicja 4.6. Wektor $e > 0$ nazywamy **jedynką porządkową** (lub **silną jedynką** lub po prostu **jedynką**, jeżeli $E_e = E$, tzn. jeśli dla każdego $x \in E$ istnieje $\lambda \geqslant 0$ takie, że $|x| \leqslant \lambda e$.

Niech E będzie kratą wektorową, I ideałem porządkowym w E, a $q : E \to E/I$ rzutowaniem kanonicznym na przestrzeń ilorazową E/I. W E/I wprowadzamy relację częściowego porządku w następujący sposób:

$$q(x) \leqslant q(y) \Longleftrightarrow \exists\, x_1 \in x + I,\ \exists\, y_1 \in y + I : x_1 \leqslant y_1.$$

STWIERDZENIE 4.7. *Przestrzeń E/I jest kratą wektorową, a odwzorowanie q dodatnim homomorfizmem kratowym.*

DOWÓD. Relacja "$\leqslant$" zdefiniowana w przestrzeni E/I spełnia w sposób oczywisty (1), (3) oraz (a) i (b). Aby wykazać aksjomat antysymetrii (2) wykorzystamy fakt, że I jest ideałem porządkowym. Jeżeli $q(x) \leqslant 0$ i $q(x) \geqslant 0$ dla $x \in E$, to istnieją $x_1, x_2 \in E$ takie, że $0 \leqslant x_1 \in x + I$ oraz $0 \leqslant x_2 \in -x + I$. Stąd $x_1 + x_2 \in I$, a ponieważ $0 \leqslant x_1 \leqslant x_1 + x_2$, więc również $x_1 \in I$ czyli $q(x) = 0$.

Dodatniość q wynika bezpośrednio z definicji relacji częściowego porządku W E/I. Aby dowieść, że E/I jest kratą, a q jest homomorfizmem kratowym wykażemy, że dla dowolnych $x, y \in E$ mamy równość $q(x \vee y) = q(x) \vee q(y)$. Ponieważ q jest dodatnie, więc $q(x \vee y)$ jest majorantą $q(x)$ i $q(y)$. Niech $z \in E$ będzie takie, że $q(z) \geqslant q(x)$ i $q(z) \geqslant q(y)$. Wtedy istnieją elementy $z_1, z_2 \in z + I$ takie, że $z_1 \geqslant x$ i $z_2 \geqslant y$. Ponadto $z_1 - z_2 \in I$ i, ponieważ I jest podkratą wektorową, $|z_1 - z_2| \in I$. Stąd $w := z_2 + |z_1 - z_2| \in z + I$ oraz $w \geqslant x \vee y$, bo $w \geqslant z_2 \geqslant y$ i $w = z_2 + |z_1 - z_2| = z_2 + (z_1 - z_2) \vee (z_2 - z_1) = z_1 \vee (2z_2 - z_1) \geqslant z_1 \geqslant x$. A więc $q(z) = q(w) \geqslant q(x \vee y)$. Zatem $q(x \vee y) = q(x) \vee q(y)$.

□

DEFINICJA 4.8. Ideał porządkowy domknięty w sensie porządku będziemy nazywać **ideałem zamkniętym**. (Po angielsku **band**.)

STWIERDZENIE 4.9.

(1) *Solidny podzbiór D kraty wektorowej E jest porządkowo domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy $\{x_\alpha\} \subset D \cap E^+,\ x_\alpha \uparrow x \in E \implies x \in D$.*
(2) *Ideał porządkowy A jest ideałem zamkniętym wtedy i tylko wtedy, gdy $\{x_\alpha\} \subset A,\ 0 \leqslant x_\alpha \uparrow x \in E \implies x \in A$.*

DOWÓD. - Ćwiczenie (skorzystać z Lematu 3.4 lub 3.6). □

DEFINICJA 4.10. Ideałem zamkniętym generowanym przez niepusty podzbiór D kraty wektorowej E nazywamy najmniejszy (w sensie inkluzji) ideał zamknięty B_D zawierający D. Jeżeli $D = \{x\}$, to $B_x := B_{\{x\}}$ nazywamy **zamkniętym ideałem głównym** generowanym przez wektor x.

TWIERDZENIE 4.11. *Jeżeli J jest ideałem porządkowym w kracie wektorowej E, to ideał zamknięty B_J generowany przez J spełnia równość*

$$B_J = \{x \in E : \exists\, \{x_\alpha\} \subset J : 0 \leqslant x_\alpha \uparrow |x|\}.$$

Ponadto $\forall\, x \in E$ zamknięty ideał główny B_x generowany przez x spełnia równość

$$B_x = \{y \in E : |y| \wedge n|x| \uparrow |y|\}.$$

DOWÓD. (*Nie obowiązuje do egzaminu.*) Niech

$$B := \{x \in E : \exists\, \{x_\alpha\} \subset J : 0 \leqslant x_\alpha \uparrow |x|\}.$$

Jest oczywiste, że każdy ideał zamknięty zawierający J musi zawierać B. Zatem, żeby dowieść równości $B = B_J$, wystarczy pokazać, że B jest ideałem zamkniętym. Niech $x, y \in B$. Weźmy dwa ciągi uogólnione $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $\{y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ spełniające zależności $0 \leqslant x_\alpha \uparrow |x|$, $0 \leqslant y_\gamma \uparrow |y|$. Z warunku

$$|x + y| \wedge (x_\alpha + y_\gamma) \uparrow |x + y| \wedge (|x| + |y|) = |x + y|$$

opartego o punkt (15) wniosku 1.6 oraz $|\mu|x_\alpha \uparrow |\mu||x| = |\mu x|$ dla każdego skalara μ wynika, że B jest podprzestrzenią wektorową. Z faktu, że J jest ideałem porządkowym oraz z nierówności $|z| \wedge x_\alpha \leqslant x_\alpha$, $x_\alpha \geqslant 0$ wynika inkluzja $\{|z| \wedge x_\alpha\} \subset J$. Zatem, jeżeli $|z| \leqslant |x|$, to na mocy punktu (15) wniosku 1.6 mamy $|z| \wedge x_\alpha \uparrow |z| \wedge |x| = |z|$, a stąd $z \in B$ czyli B jest ideałem.

Załóżmy teraz, że ciąg uogólniony $\{u_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset B$ spełnia warunek $0 \leqslant u_\gamma \uparrow u$. Niech

$$D := \{v \in J : \exists\ \gamma \in \Gamma : v \leqslant u_\gamma\}.$$

Zbiór D można interpretować jako ciąg uogólniony taki, że $D \uparrow u$. A więc, na mocy stwierdzenia 4.9, B jest ideałem zamkniętym.

Aby wykazać drugą część tezy zauważmy, że $B_x = B_{E_x}$. Niech $y \in B_x$. na mocy poprzednio wykazanego przypadku istnieje ciąg uogólniony $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset E_x$ spełniający warunek $0 \leqslant x_\alpha \uparrow |y|$. Dla każdego α istnieje zatem n takie, że $x_\alpha \leqslant |y| \wedge n|x| \leqslant |y|$. Stąd $|y| \wedge n|x| \uparrow |y|$, co kończy dowód. $\square$

Definicja 4.12. Wektor $e > 0$ nazywamy **słabą jedynką** jeżeli $B_e = E$ tzn. jeżeli $x \wedge ne \uparrow x\ \forall\ x \in E^+$. Gdy E jest archimedesowa, to $e > 0$ jest słabą jedynką wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi implikacja $|x| \wedge e = 0 \implies x = 0$. (Ćwiczenie.) W oczywisty sposób każda jedynka porządkowa jest słabą jedynką.

Definicja 4.13. **Rozłączne dopełnienie** niepustego zbioru A definiujemy następująco:

$$A^d := \{x \in E : |x| \wedge |a| = 0\ \forall\ a \in A\}.$$

Twierdzenie 4.14. *Jeżeli A jest niepustym podzbiorem kraty wektorowej E, to A^d jest ideałem zamkniętym. Gdy E jest archimedesowa, to $B_A = A^{dd} := (A^d)^d$. W szczególności każdy ideał zamknięty B spełnia równość $B = B^{dd}$.*

Dowód. Fakt, że A^d jest ideałem zamkniętym wynika z porządkowej ciągłości operacji kratowych.

Zawsze $A \subset A^{dd}$, a stąd $B_A \subset A^{dd}$. Aby zakończyć dowód dla E archimedesowej wystarczy dowieść, że $A^{dd} \subset B_A$. Niech $0 < x \in A^{dd}$ i $D := \{z \in B_A : 0 \leqslant z \leqslant x\}$. Musimy wykazać, że istnieje $\sup D = x$.

Niech $z \in E$ będzie wektorem spełniającym nierówność $a \leqslant z\ \forall\ a \in D$. Wtedy również

$$a \leqslant x \wedge z\ \forall\ a \in D. \tag{4.1}$$

Należy dowieść, że $x \leqslant z$ czyli, że $x = x \wedge z$. Dla dowodu nie wprost załóżmy $u := x - x \wedge z > 0$. W oczywisty sposób $u \in A^{dd}$ oraz $u \notin A^d$ ponieważ $A^d \cap A^{dd} = 0$. Zatem istnieje $y \in A$ taki, że $v := |y| \wedge u > 0$, skąd $v \in B_A$. Ponieważ $v \leqslant u \leqslant x$, więc $v \in D$ i na mocy (4.1)

$$2v = v + v \leqslant x \wedge z + (x - x \wedge z) = x.$$

Stosując indukcję, otrzymujemy $nv \leqslant x \ \forall n$. Z archimedesowości E mamy $v = 0$, co prowadzi do sprzeczności. Stąd $u = 0$, a zatem $x = x \wedge z \leqslant z$.

Wykazaliśmy więc, że $\sup D = x$. Ponieważ $D \subset B_A$, a B_A jest ideałem zamkniętym, otrzymujemy $x \in B_A$, skąd $B_A = D^{dd}$. □

Definicja 4.15. Ideał zamknięty B w kracie wektorowej E jest **projekcyjny** (**projection band**), jeżeli $E = B \oplus B^d$.

Stwierdzenie 4.16. *Projekcja na ideał projekcyjny jest dodatnia.*

Dowód. Niech B będzie ideałem projekcyjnym w E, a P projekcją na ten ideał. Wtedy $E = B \oplus B^d$. Niech $x = y + z$ będzie rozkładem dowolnego elementu $x \in E$ względem tej sumy prostej. Jeżeli $x \geqslant 0$, to $0 \leqslant y^+ + z^+ - (y^- + z^-)$ czyli $0 \leqslant y^- + z^- \leqslant y^+ + z^+$. Element y^- jest rozłączny z $y^+ + z^+$, gdyż $y^+ \wedge y^- = 0$ i $y^- \wedge z^+ = 0$. Ponieważ równocześnie $y^- \leqslant y^- + z^- \leqslant y^+ + z^+$, więc $y^- = 0$, czyli $Px = y = y^+ \geqslant 0$. □

Twierdzenie 4.17. *Jeżeli E jest porządkowo zupełna, to każdy ideał zamknięty jest projekcyjny, tzn. $\forall\ A \subset E$ mamy $B_A \oplus A^d = E$.*

Dowód. Ideały B_A i A^d są rozłączne, gdyż $A \subset A^{dd} = B_A$. Ponieważ E jest porządkowo zupełna, więc dla każdego $x \in E^+$ istnieje $y := \sup[0, x] \cap B_A$ oraz $y \in B_A$. Niech $z := x - y$. Dowód będzie zakończony, jeżeli wykażemy, że $z \in A^d$. Niech $u \in A$ będzie dowolne i niech $w := z \wedge |u|$. Ponieważ $w \in B_A$ i $w + y \leqslant z + y = x$ oraz $z \geqslant 0$ a więc również $w \geqslant 0$, zatem z definicji y i warunku $y \in B_A$ mamy $w + y \leqslant y$, a stąd $w = 0$. Rozkład dowolnego wektora otrzymujemy z rozkładu jego części dodatniej i ujemnej. □

Twierdzenie 4.18. *Jeżeli A jest podzbiorem kraty wektorowej E, to B_A jest projekcyjny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$x_A := \sup_{n,H}(x \wedge n \sum_{y \in H} |y|),$$

istnieje dla każdego $x \in E^+$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, a H jest dowolnym skończonym podzbiorem A. W takim przypadku odwzorowanie $E \ni x \to (x^+)_A - (x^-)_A$ jest projekcją na B_A.

Dowód. (*Nie obowiązuje do egzaminu.*) Z dowodu poprzedniego twierdzenia wynika, że B_A jest projekcyjny wtedy i tylko wtedy, gdy $P_A x := \sup[0, x] \cap B_A$ istnieje dla każdego $x \in E^+$. Wtedy też odwzorowanie $E \ni x \to P_A(x^+) - P_A(x^-)$ jest projekcją na B_A. Ideał porządkowy E_A generowany przez A składa się dokładnie z $w \in E$ spełniających nierówność $|w| \leqslant n \sum_{y \in H} |y|$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ i pewnego skończonego $H \subset A$.

Oznaczmy przez J podprzestrzeń wektorową generowaną przez wszystkie takie $z \in E^+$, które są postaci $z = \sup C$, gdzie C jest skierowanym podzbiorem $(E_A)^+$. Chcemy dowieść równości $J = B_A$.

Każdy z elementów $z \in J$ jest postaci $z = \sup C_1 - \sup C_2$ dla odpowiednich skierowanych podzbiorów $C_1, C_2 \subset (E_A)^+$, zatem na mocy punktów (13) i (15) wniosku 1.6, J jest ideałem porządkowym. Ponadto, jeżeli $D \subset J^+$ jest zbiorem skierowanym i w E istnieje $w := \sup D$, to dla każdego $z \in D$ istnieje zbiór skierowany $C_z \subset (E_A)^+$ taki, że $z = \sup C_z$. Stąd $w = \sup \bigcup_{z \in D} C_z$, a zatem $w \in J$. Czyli J jest ideałem zamkniętym i ponieważ $A \subset J \subset B_A$ otrzymujemy $J = B_A$. A więc $P_A x$, o ile istnieje, musi się równać $\sup[0, x] \cap E_A$ i na odwrót, jeżeli istnieje $\sup[0, x] \cap E_A$, to musi się równać $P_A x$. □

WNIOSEK 4.19. *Zamknięty ideał główny B_u jest projekcyjny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in E^+$ istnieje* $\sup_n(x \wedge n|u|)$.

DOWÓD. - Ćwiczenie. $\square$

WNIOSEK 4.20. *Każdy zamknięty ideał główny w E jest projekcyjny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej pary wektorów $x, y \in E^+$ istnieje* $\sup_n(x \wedge ny)$. *W szczególności każda σ-porządkowo zupełna krata wektorowa ma tę własność.*

DOWÓD. - Ćwiczenie. $\square$

DEFINICJA 4.21. X, Y - kraty wektorowe

$$\mathcal{L}_n(X,Y) \stackrel{\text{df}}{=} \{T \in \mathcal{L}_r(X,Y) : T - \text{porządkowo ciągły}\}$$
$$\mathcal{L}_c(X,Y) \stackrel{\text{df}}{=} \{T \in \mathcal{L}_r(X,Y) : T - \sigma - \text{porządkowo ciągły}\}$$

TWIERDZENIE 4.22. *(Ogasawara). Jeżeli E i F są kratami wektorowymi i F jest porządkowo zupełna, to $\mathcal{L}_n(E,F)$ i $\mathcal{L}_c(E,F)$ są ideałami zamkniętymi w $\mathcal{L}_r(E,F)$ oraz*

$$\mathcal{L}_r(E,F) = \mathcal{L}_n(E,F) \oplus \mathcal{L}_n(E,F)^d = \mathcal{L}_c(E,F) \oplus \mathcal{L}_c(E,F)^d.$$

DOWÓD. - bez dowodu. $\square$

DEFINICJA 4.23. Jeżeli E jest kratą wektorową, to porządkowo zupełną kratę wektorową $E^{\sim} := \mathcal{L}_r(E,\mathbb{R})$ nazywamy **porządkowo dualną** do E. Ideał zamknięty $E_n^{\sim} := \mathcal{L}_n(E,\mathbb{R})$ nazywamy **porządkowo sprzężoną**. Jeżeli $E_n^{\sim}$ rozdziela punkty E, to E nazywamy **normalną kratą wektorową**.

5. Unormowane kraty wektorowe

DEFINICJA 5.1. Seminormę p określoną na kracie wektorowej E nazywamy **seminormą kratową**, jeżeli dla $x, y \in E$ zachodzi implikacja: $|x| \leqslant |y| \implies p(x) \leqslant p(y)$. **Kratą unormowaną** nazywamy kratę wektorową z określoną w niej normą kratową. **Kratą Banacha** nazywamy kratę unormowaną zupełną w normie.

STWIERDZENIE 5.2. *W kracie unormowanej E*

(a) *Operacje kratowe są ciągłe w normie.*
(b) *Stożek E^+ jest domknięty w normie i w słabej topologii, E jest archimedesowa.*
(c) *Przedziały porządkowe są domknięte w normie i w słabej topologii.*
(d) *Jeżeli $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ jest ciągiem uogólnionym w E i $x_\alpha \uparrow$ oraz $\|x_\alpha - x\| \to 0$, to $x_\alpha \uparrow x$.*
(e) *Domknięcie zbioru solidnego jest zbiorem solidnym.*
(f) *Każdy ideał zamknięty jest domknięty w E.*
(g) *Projekcja na zamknięty ideał projekcyjny jest ciągła i ma normę 1.*

DOWÓD. (a) Ciągłość $x \to |x|$ wynika bezpośrednio z definicji, a stąd ciągłość $x \to x^+$ i $x \to x^-$, bo $x^+ = \frac{1}{2}(|x| + x)$, $x^- = \frac{1}{2}(|x| - x)$.

(b) $E^+ = \{x \in E : x^- = 0\}$, a więc jest przeciwobrazem zera przez odwzorowanie $x \to x^-$. Słaba domkniętość wynika z wypukłości. Gdy $x, y \in E$ i $nx \leqslant y$ dla $n \in \mathbb{N}$, to $x - n^{-1}y \in -E^+$ dla $n \in \mathbb{N}$ i $x - n^{-1}y \to x$, zatem $x \in -E^+$ z domkniętości E^+, czyli $x \leqslant 0$. A więc E jest archimedesowa.

(c) Gdy $x \leqslant y$, to $[x, y] = (x + E^+) \cap (y - E^+)$, a więc $[x, y]$ jest domknięty i jako wypukły również słabo domknięty.

(d) Przy ustalonym α ciąg uogólniony $\{x_\beta - x_\alpha\}_{\beta \geqslant \alpha}$ jest zawarty w E^+ i spełnia warunek $x_\beta - x_\alpha \underset{\beta}{\to} x - x_\alpha$. Zatem $x - x_\alpha \in E^+$, a stąd $x \geqslant x_\alpha \; \forall \; \alpha$. A więc x jest majorantą $\{x_\alpha\}$. Załóżmy, że $y \geqslant x_\alpha \; \forall \; \alpha$. Zatem $y - x_\alpha \in E^+ \; \forall \; \alpha$, a ponieważ $y - x_\alpha \to y - x$, więc $y - x \in E^+$ czyli $y \geqslant x$. Stąd $x = \sup\{x_\alpha\}$.

(e) Niech A będzie zbiorem solidnym w E i załóżmy, że $|y| \leqslant |x|$ dla pewnego $x \in \overline{A}$, $y \in E$. Istnieje zatem ciąg $\{x_n\} \subset A$ zbieżny do x. Zdefiniujmy $y_n^+ := y^+ \wedge |x_n|$, $y_n^- := y^- \wedge |x_n|$. Wtedy $y_n^+ + y_n^- = y_n^+ \vee y_n^- \leqslant |x_n| \in A$, a więc $y_n := y_n^+ - y_n^- \in A$, bo $|y_n| := y_n^+ + y_n^- \leqslant |x_n|$. Na mocy (a), $y = \lim_{n \to \infty} y_n$, a zatem $y \in \overline{A}$.

(f) Niech B będzie ideałem zamkniętym w E, $\{z_n\} \subset B$ i $z_n \to z$. Zdefiniujmy $y_n := |z_n| \wedge |z|$. Wtedy $y_n \in B$, bo $|y_n| \leqslant |z_n|$ i na mocy (a), $y_n \to |z|$. Ciąg $x_n := \sup_{1 \leqslant m \leqslant n} y_m$ $(n \in \mathbb{N})$ jest rosnący w B i spełnia nierówność $y_n \leqslant x_n \leqslant |z|$. Stąd

$$\| x_n - |z| \, \| \leqslant \| y_n - |z| \, \|,$$

a więc $x_n \to |z|$. Na mocy (d) $|z| = \sup_n x_n$, a zatem $|z| \in B$, ponieważ B jest zamknięty.

(g) Niech P będzie projekcją na ideał projekcyjny. Na mocy stwierdzenia 4.16, P jest operatorem dodatnim. Zatem, korzystając ze stwierdzenia 1.7, mamy $|Px| \leqslant P|x| \leqslant |x|$, a stąd $\|Px\| \leqslant \|x\|$ dla $x \in E$. $\square$

LEMAT 5.3. *Jeżeli w kracie Banacha $x_n \to x$, to istnieje podciąg $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ oraz $u \geqslant 0$ takie, że $|y_n - x| \leqslant \frac{1}{n} u$.*

DOWÓD. Wybieramy podciąg $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ w taki sposób, że $\| n \, |y_n - x| \, \| \leqslant \frac{1}{2^n}$ dla każdego n. Na mocy zupełności kraty Banacha, szereg $\sum_{n=1}^\infty n \, |y_n - x|$ jest zbieżny w normie. Niech $u := \sum_{n=1}^\infty n \, |y_n - x|$. Ze stwierdzenia 5.2 (b) wynika dodatniość u, skąd $n \, |y_n - x| \leqslant u$ czyli $|y_n - x| \leqslant \frac{1}{n} u$ dla każdego n. $\square$

TWIERDZENIE 5.4. *Jeżeli E jest kratą Banacha, F unormowaną kratą wektorową, a $T : E \to F$ porządkowo ograniczonym operatorem liniowym, to T jest ciągły. (Zatem również operatory dodatnie lub regularne między tymi przestrzeniami są ciągłe.)*

DOWÓD. Dla dowodu nie wprost załóżmy, że T jest nieciągły. Zatem istnieje ciąg $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ taki, że $x_n \to 0$ a $Tx_n \nrightarrow 0$. To oznacza, że istnieje podciąg $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ oraz $\varepsilon > 0$ takie, że $\|Ty_n\| > \varepsilon$ dla każdego n. Na mocy lematu 5.3, podciąg $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ może być tak wybrany, że $|y_n| \leqslant \frac{1}{n} u$ dla pewnego $u \in E^+$ oraz $\forall \; n \in \mathbb{N}$. Ponieważ T jest porządkowo ograniczony, więc istnieje $w \in F$ takie, że $T([-u, u]) \subset [-w, w]$. Z nierówności $|ny_n| \leqslant u$ wynika zależność $n|Ty_n| = |T(ny_n)| \leqslant w$ czyli $|Ty_n| \leqslant \frac{1}{n} w$ dla każdego n. Ale wtedy mamy

$$0 < \varepsilon \leqslant \|Ty_n\| \leqslant \frac{1}{n} \|w\| \to 0,$$

co prowadzi do sprzeczności. $\square$

DEFINICJA 5.5. Jeżeli E, F są kratami Banacha, przy czym F jest porządkowo zupełna oraz operator liniowy $T : E \to F$ jest regularny, to jego r-**normę** definiujemy następująco: $\|T\|_r := \| \, |T| \, \|$.

Mamy przy tym zależność

$$\|T\|_r = \inf\{\|S\| : \pm T \leqslant S\},$$

którą możemy wykorzystać jako definicję r-normy operatora regularnego o wartościach w przestrzenie niekoniecznie porządkowo zupełnej.

TWIERDZENIE 5.6. *Krata unormowana E jest kratą Banacha wtedy i tylko wtedy, gdy każdy rosnący ciąg Cauchy'ego w E^+ jest zbieżny w normie.*

DOWÓD. Niech $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w E. Wybierzmy podciąg $\{u_n\} \subset \{x_n\}$ spełniający dla każdego n nierówność $\|u_{n+1} - u_n\| < \frac{1}{2^n}$ i rozważmy ciągi $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E^+$ zdefiniowane następująco

$$y_n := \sum_{i=1}^{n} (u_{i+1} - u_i)^+, \quad z_n := \sum_{i=1}^{n} (u_{i+1} - u_i)^-.$$

Wtedy $0 \leqslant y_n \uparrow$ oraz

$$\begin{aligned} \|y_{n+p} - y_n\| &= \| \sum_{i=n}^{n+p-1} (u_{i+1} - u_i)^+ \| \leqslant \sum_{i=n}^{n+p-1} \|(u_{i+1} - u_i)^+\| \\ &\leqslant \sum_{i=n}^{n+p-1} \|(u_{i+1} - u_i)\| \leqslant \sum_{i=n}^{n+p-1} \frac{1}{2^i} < \frac{1}{2^{n-1}}, \end{aligned}$$

skąd wynika, że $\{y_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego w normie. Podobnie dowodzimy, że rosnący ciąg $\{z_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego. Z założenia wynika zatem istnienie $y, z \in E^+$ takich, że $y_n \to y$, $z_n \to z$.

Ponieważ $y_n - z_n = u_{n+1} - u_1 \ \forall\ n$, więc $u_n = y_{n-1} - z_{n-1} + u_1 \to y - z + u_1$. Ze zbieżności podciągu ciągu Cauchy'ego wynika zbieżność samego ciągu.

Dowód w drugą stronę jest oczywisty. □

TWIERDZENIE 5.7. *Jeżeli E, F są kratami Banacha, przy czym F jest porządkowo zupełna, to porządkowo zupełna krata wektorowa $\mathcal{L}_r(E, F)$ zaopatrzona w r-normę jest kratą Banacha.*

DOWÓD. Fakt, że r-norma jest rzeczywiście normą jest oczywisty.

Jeżeli T jest operatorem dodatnim, to $\|T\|_r = \| \, |T| \, \| = \|T\|$. Jeżeli dwa operatory $S, T \in \mathcal{L}_r(E, F)$ spełniają nierówność $0 \leqslant S \leqslant T$ i $\|x\| \leqslant 1$, to $|Sx| \leqslant S|x| \leqslant T|x|$, a stąd

$$\|Sx\| = \| \, |Sx| \, \| \leqslant \|S|x| \, \| \leqslant \|T|x| \, \| \leqslant \|T\|.$$

Zatem $\|S\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Sx\| \leqslant \|T\|$. W szczególności, jeżeli $S, T \in \mathcal{L}_r(E, F)$ spełniają nierówność $|S| \leqslant |T|$, to

$$\|S\|_r = \| \, |S| \, \| \leqslant \| \, |T| \, \| = \|T\|_r,$$

co dowodzi, że $\| \cdot \|_r$ jest normą kratową w $\mathcal{L}_r(E, F)$.

Aby udowodnić zupełność normy $\| \cdot \|_r$, wystarczy na mocy twierdzenia 5.6 wykazać, że każdy rosnący ciąg operatorów dodatnich, spełniający warunek Cauchy'ego względem normy $\| \cdot \|_r$ jest zbieżny w $\mathcal{L}_r(E, F)$. Niech $\{T_n\}$ będzie takim ciągiem. Z nierówności $\|T_n - T_m\| \leqslant \|T_n - T_m\|_r$ wynika, że $\{T_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego w normie operatorowej. Istnieje więc operator $T \in \mathcal{L}(E, F)$ spełniający warunek $\|T_n - T\| \to 0$.

Dla każdego $x \in E^+$ mamy $0 \leqslant T_n x \uparrow$ i $\|T_n x - Tx\| \to 0$, a stąd na mocy stwierdzenia 5.2 (d), $T_n x \uparrow Tx$ dla każdego $x \in E^+$. Zatem T spełnia dla każdego n nierówność $0 \leqslant T_n \leqslant T$, skąd wynika, że jest dodatni, a więc należy do $\mathcal{L}_r(E,F)$. na mocy ostatniej nierówności otrzymujemy ponadto

$$\|T_n - T\|_r = \| \, |T_n - T| \, \| = \|T - T_n\| \to 0,$$

co dowodzi, że $\mathcal{L}_r(E,F)$ z r-normą jest kratą Banacha. □

Przez E^* będziemy oznaczać przestrzeń rzeczywistych funkcjonałów liniowych, ciągłych na przestrzeni liniowo-topologicznej E.

Stwierdzenie 5.8. $E^* \subset E^\sim$.

Dowód. - Ćwiczenie. □

Twierdzenie 5.9. *jeżeli E jest kratą unormowaną, to E^* jest kratą Banacha oraz dla $x^* \in E^*$ i $x \in E^+$ mamy*

$$(x^*)^+(x) = \sup\{x^*(y) : 0 \leqslant y \leqslant x\}, \tag{5.1}$$

$$(x^*)^-(x) = \sup\{-x^*(y) : 0 \leqslant y \leqslant x\}, \tag{5.2}$$

$$|x^*|(x) = \sup\{x^*(y) : |y| \leqslant x\}, \tag{5.3}$$

$$\|x^*\| = \|x^*\|_r = \| \, |x^*| \, \|. \tag{5.4}$$

Ponadto E^* jest ideałem porządkowym w $E^\sim$ i jeżeli E jest kratą Banacha, to $E^* = E^\sim$.

Dowód. Pierwsze trzy równości wynikają bezpośrednio z twierdzenia 2.8. Dla dowodu czwartej rozważmy następującą nierówność wynikającą ze stwierdzenia 1.7:

$$|x^*(x)| \leqslant |x^*|(|x|) \leqslant \| \, |x^*| \, \| \cdot \|x\|.$$

Jej konsekwencją jest nierówność $\|x^*\| \leqslant \| \, |x^*| \, \|$. Z drugiej strony, jeżeli $\|x\| \leqslant 1$ i weźmiemy dowolne ustalone $\varepsilon > 0$, to to z równości (5.3) wynika istnienie $y \in E$ takiego, że $|y| \leqslant |x|$ i $|x^*|(|x|) - \varepsilon < |x^*(y)| \leqslant \|x^*\|$. Zatem

$$\| \, |x^*| \, \| = \sup\{|x^*|(|x|) : \|x\| \leqslant 1\} \leqslant \|x^*\| + \varepsilon \quad \forall \, \varepsilon > 0.$$

Stąd $\| \, |x^*| \, \| \leqslant \|x^*\|$, a więc $\| \, |x^*| \, \| = \|x^*\|$.

Aby wykazać, że E^* jest ideałem porządkowym w $E^\sim$ zauważmy, że gdy $x^* \in E^*$, $y^* \in E^\sim$ oraz $|y^*| \leqslant |x^*|$, to na mocy stwierdzenia 1.7,

$$|y^*(x)| \leqslant |y^*|(|x|) \leqslant |x^*|(|x|) \leqslant \| \, |x^*| \, \| \cdot \|x\| \quad \text{dla } x \in E.$$

co oznacza ciągłość y^*.

W przypadku, gdy E jest kratą Banacha, równość $E^* = E^\sim$ wynika z twierdzenia 5.4 i ze stwierdzenia 5.8. □

Definicja 5.10. Homomorfizm kratowy między dwiema unormowanymi kratami wektorowymi E, F jest **izometrią kratową** jeżeli $\|Tx\| = \|x\|$ dla $x \in E$.

Definicja 5.11. Operator $T : E \to F$ pomiędzy dwiema kratami wektorowymi **zachowuje przedziały** jeżeli $T[0,x] = [0,Tx]$ dla $x \in E^+$.

Twierdzenie 5.12. *Niech E, F będą kratami Banacha, a $T : E \to F$ operatorem dodatnim. Wtedy*

(1) *Jeżeli T zachowuje przedziały, to $T^* : F^* \to E^*$ jest homomorfizmem kratowym.*
(2) *T jest homomorfizmem kratowym wtedy i tylko wtedy, gdy T^* zachowuje przedziały.*

Dowód. - bez dowodu. □

Twierdzenie 5.13. *(Luxemburg-de Pagter) Niech E będzie archimedesową kratą wektorową, F porządkowo zupełną kratą wektorową, a $T : E \to F$ operatorem dodatnim. Wtedy istnieje porządkowo zupełna krata wektorowa $L \supset E$ i porządkowo ciągły, zachowujący przedziały operator $\hat{T} : L \to F$ będący rozszerzeniem T.*

Dowód. - bez dowodu. □

Definicja 5.14. Porządkowo zupełną kratę wektorową $\hat{E}$ nazywamy **porządkowym uzupełnieniem** kraty wektorowej E, jeżeli istnieje izomorfizm kratowy $\pi : E \to \pi(E) \subset \hat{E}$ taki, że

$$\hat{x} = \sup\{\pi(v) : v \in E, \pi(v) \leqslant \hat{x}\} = \inf\{\pi(w) : w \in E, \pi(w) \geqslant \hat{x}\}$$

dla każdego $\hat{x} \in \hat{E}$.

Ćwiczenie 5.15. Tylko archimedesowa krata wektorowa może mieć porządkowe uzupełnienie. Uzupełnienie takie jest jednoznaczne z dokładnością do izomorfizmu kratowego.

Twierdzenie 5.16. *Załóżmy, że E jest kratą Banacha, a E^δ jej porządkowym uzupełnieniem. Na E^δ definiujemy normę*

$$|||\hat{x}||| := \inf\{\|x\| : x \in E^+, |\hat{x}| \leqslant x\}.$$

Wtedy $(E^\delta, |||\cdot|||)$ jest kratą Banacha.

Dowód. (*Nie obowiązuje do egzaminu.*) Sprawdzenie, że $|||\cdot|||$ jest normą kratową jest natychmiastowe. Aby sprawdzić jej zupełność skorzystamy z twierdzenia 5.6.

Załóżmy, że ciąg $\{\hat{x}_n\} \in E^\delta$ spełnia dla każdego n warunek $0 \leqslant \hat{x}_n \uparrow$, $\|\hat{x}_{n+1} - \hat{x}_n\| < \frac{1}{2^n}$. Dla każdego n wybierzmy $y_n \in E^+$ takie, że $0 \leqslant \hat{x}_{n+1} - \hat{x}_n \leqslant y_n$ oraz $\|y_n\| < \frac{1}{2^n}$ (istnienie takiego y_n wynika z własności porządkowego uzupełnienia). Zdefiniujmy $x_n := \sum_{i=1}^n y_i$. Ciąg x_n, jest ciągiem Cauchy'ego, a zatem jest zbieżny do pewnego $x = \sum_{n=1}^\infty y_n \in E$. Ze stwierdzenia 5.2 (d) wnioskujemy, że $x_n \uparrow x$. W szczególności, definiując $z_n := \sum_{i=n}^\infty y_i$, mamy $\|z_n\| \to 0$. Przyjmując $\hat{x}_0 := 0$ i wybierając $y_0 \in E$ takie, że $y_0 \geqslant \hat{x}_1$ (istnienie takiego y_0 wynika z własności porządkowego uzupełnienia), otrzymujemy

$$\hat{x}_n = \sum_{i=1}^n (\hat{x}_i - \hat{x}_{i-1}) \leqslant \sum_{i=1}^n y_{i-1} = x_{n-1} + y_0.$$

Stąd $\hat{x}_n \leqslant x + y_0 \; \forall\, n$, co oznacza, że ciąg $\{\hat{x}_n\}$ jest ograniczony. Z porządkowej zupełności E^δ wynika więc istnienie $\hat{x} \in E^\delta$ takiego, że $\hat{x}_n \uparrow \hat{x}$.

Zauważmy następnie, że dla każdego n i p mamy

$$0 \leqslant \hat{x}_{n+p} - \hat{x}_n = \sum_{i=n}^{n+p-1} (\hat{x}_{i+1} - \hat{x}_i) \leqslant \sum_{i=n}^{n+p-1} y_i \leqslant \sum_{i=n}^{\infty} y_i = z_n.$$

Zmierzając z p do nieskończoności dostajemy $0 \leqslant \hat{x} - \hat{x}_n \leqslant z_n \; \forall\, n$. Stąd $\|\hat{x} - \hat{x}_n\| \leqslant \|z_n\|$, a zatem $\|\hat{x} - \hat{x}_n\| \to 0$, co kończy dowód. □

6. Kraty Banacha z normą porządkowo ciągłą

UWAGA 6.1. *Ten podrozdział ma charakter informacyjny - nie obowiązuje do egzaminu.*

DEFINICJA 6.2. Seminorma p w kracie wektorowej jest **porządkowo ciągła** jeżeli spełniona jest implikacja $x_\alpha \downarrow 0 \implies p(x_\alpha) \downarrow 0$.

TWIERDZENIE 6.3. *Naturalne zanurzenie unormowanej kraty wektorowej $E \to E^{**}$ jest izometrią kratową.*

DOWÓD. - ćwiczenie. □

TWIERDZENIE 6.4. *Dla kraty Banacha następujące warunki są równoważne:*
(1) *E ma porządkowo ciągłą normę.*
(2) *Każdy liniowy, ciągły funkcjonał na E jest porządkowo ciągły.*
(3) *E jest ideałem porządkowym w E^{**}.*
(4) *Przedziały porządkowe w E są słabo zwarte.*
(5) *Każdy porządkowo ograniczony ciąg elementów rozłącznych w E jest zbieżny w normie do zera.*

DOWÓD. - bez dowodu. □

WNIOSEK 6.5. *Krata Banacha z porządkowo ciągłą normą jest porządkowo zupełna.*

DOWÓD. - ćwiczenie. □

TWIERDZENIE 6.6. *(Krengel-Synnatzschke) Jeżeli E i F są kratami Banacha, przy czym F ma porządkowo ciągłą normę, to odwzorowanie $\mathcal{L}_r(E,F) \ni T \to T^* \in \mathcal{L}_r(F^*,E^*)$ jest izometrią kratową, tzn.*

$$|T^*| = |T|^*, \quad \|T^*\|_r = \|T\|_r \quad \forall\ T \in \mathcal{L}_r(E,F).$$

DOWÓD. (Szkic dowodu.) Twierdzenie zostanie wykazane przy dodatkowym założeniu, że E jest porządkowo zupełna.

Z nierówności $\pm T \leqslant |T|$ wynika wprost z definicji sprzężeń nierówność $\pm T^* \leqslant |T|^*$, a stąd

$$|T^*| \leqslant |T|^*. \tag{6.1}$$

Aby wykazać nierówność przeciwną musimy dowieść, że

$$\langle |T|^* x^*, x\rangle \leqslant \langle |T^*| x^*, x\rangle \quad \text{dla } x^* \in (F^*)^+,\ x \in E^+.$$

(Piszemy $\langle x^*, x\rangle$ zamiast $x^*(x)$.)

Niech $x^* \in (F^*)^+$ i $x \in E^+$. Ponieważ $Tx \in F \subset F^{**}$ i F jest podkratą wektorową F^{**}, więc z twierdzenia 5.9 dla każdego $z \in E^+$ otrzymujemy

$$\langle x^*, |Tz|\rangle = \sup_{|y^*| \leqslant x^*} \langle y^*, Tz\rangle = \sup_{|y^*| \leqslant x^*} \langle T^* y^*, z\rangle \leqslant \sup_{|y^*| \leqslant x^*} \langle |T^*|\,|y^*|, z\rangle = \langle |T^*|\, x^*, z\rangle. \tag{6.2}$$

Niech

$$\mathcal{C} := \{\sum_{i=1}^n |Tx_i| : x_i \in E^+\ \forall\ i,\ x_i \wedge x_j = 0 \text{ dla } i \neq j,\ \sum_{i=1}^n x_i = x\}.$$

Zbiór $\mathcal{C}$ jest skierowany w górę (dw. w oparciu o tw. 2.11 - ćwiczenie. Może trzeba trochę poprawić jego definicję). Z nierówności $\sum_{i=1}^n |Tx_i| \leqslant \sum_{i=1}^n |T|x_i = |T|x$ i twierdzenia 2.11

(Abramowicza) otrzymujemy warunek $\mathcal{C} \uparrow |T|x$. Zatem z porządkowej ciągłości normy (tw. 6.4 (2)) mamy

$$\{x^*(c) : c \in \mathcal{C}\} \uparrow \langle x^*, |T|x\rangle = \langle |T|^* x^*, x\rangle. \tag{6.3}$$

Z (6.2) wynika dla każdego $c = \sum_{i=1}^n |Tx_i| \in \mathcal{C}$ następująca zależność:

$$x^*(c) = \langle x^*, \sum_{i=1}^n |Tx_i|\rangle = \sum_{i=1}^n \langle x^*, |Tx_i|\rangle \leqslant \sum_{i=1}^n \langle |T^*|x^*, x_i\rangle = \langle |T^*|x^*, \sum_{i=1}^n x_i\rangle = \langle |T^*|x^*, x\rangle.$$

Zatem, na mocy (6.3), otrzymujemy $\langle |T|^* x^*, x\rangle \leqslant \langle |T^*|x^*, x\rangle$, co łącznie z (6.1) daje równość $|T^*| = |T|^*$. Ponadto

$$\|T^*\|_r = \|\,|T^*|\,\| = \|\,|T|^*\,\| = \|\,|T|\,\| = \|T\|_r,$$

co kończy dowód twierdzenia. □

Definicja 6.7. Wektor $u > 0$ w kracie wektorowej jest

(1) **atomem**, gdy $0 \leqslant x \leqslant u,\ 0 \leqslant y \leqslant u,\ x \wedge y = 0 \implies x = 0$ lub $y = 0$.
(2) **wektorem dyskretnym**, gdy $\forall\ 0 \leqslant x \leqslant u\ \exists\ \lambda \geqslant 0 : x = \lambda u$, tzn. gdy $[0, u] = \{\lambda u : 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$.

Lemat 6.8. *W archimedesowej kracie wektorowej E wektor dodatni jest atomem wtedy i tylko wtedy, gdy jest wektorem dyskretnym. Ponadto w takim przypadku przestrzeń wektorowa $\{\lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}$ generowana przez atom u jest ideałem projekcyjnym.*

Dowód. Załóżmy, że $u > 0$ jest atomem w E i niech $0 < x \leqslant u$. Zdefiniujmy $\alpha := \sup\{\beta \geqslant 0 : \beta x \leqslant u\}$. Z archimedesowości E wynika nierówność $1 \leqslant \alpha < \infty$. Ponadto $\alpha x \leqslant u$. Chcemy dowieść równości $\alpha x = u$.

Dla dowodu nie wprost załóżmy $v := u - \alpha x > 0$. Z archimedesowości E mamy $(v - \frac{1}{n}x)^+ \uparrow v$, a stąd $(v - \frac{1}{k}x)^+ > 0$ dla pewnego k takiego, że $\frac{1}{k} < \alpha$. Poza tym

$$(v - \frac{1}{k}x)^+ = (u - (\alpha + \frac{1}{k})x)^+ \leqslant u^+ = u \leqslant 2\alpha u,$$

gdyż $\alpha \geqslant 1$. Z drugiej strony $(u - (\alpha + \frac{1}{k})x)^- > 0$, bo gdyby tak nie było, to mielibyśmy $(\alpha + \frac{1}{k})x \leqslant u$, co jest sprzeczne z definicją α. Zaobserwujmy, że również

$$(u - (\alpha + \frac{1}{k})x)^- = ((\alpha + \frac{1}{k})x - u)^+ \leqslant 2\alpha x \leqslant 2\alpha u.$$

Zatem dla $y := \frac{1}{2\alpha}(u - (\alpha + \frac{1}{k})x)^+$ i $z := \frac{1}{2\alpha}(u - (\alpha + \frac{1}{k})x)^-$ mamy $0 < y \leqslant u$, $0 < z \leqslant u$ oraz $y \wedge z = 0$ co jest sprzeczne z założeniem, że u jest atomem.

Wykażemy teraz drugą część lematu. Niech $A := \{\lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Z pierwszej części lematu wynika, że A jest ideałem porządkowym. Aby wykazać jego zamkniętość załóżmy $0 \leqslant \lambda_n u \uparrow x \in E$. Wtedy $0 \leqslant \lambda_n \uparrow$ w $\mathbb{R}$, a stąd $\lambda_n \uparrow \lambda$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{R}$, gdyż E jest archimedesowa. Zatem $\lambda_n u \uparrow \lambda u$, a więc $x = \lambda u$ t.j., $x \in A$, co kończy dowód zamkniętości A.

Dla dowodu projekcyjności A weźmy $0 < x \in E$ i oznaczmy

$$\alpha := \sup\{\beta \geqslant 0 : \beta u \leqslant x\}.$$

Stąd $\alpha u \leqslant x$, a korzystając z archimedesowości E mamy $0 \leqslant \alpha < \infty$. Wobec równości $x = \alpha u + (x - \alpha u)$, wystarczy wykazać rozłączność elementów $x - \alpha u$ i αu czyli rozłączność $x - \alpha u$ i u.

W tym celu zauważmy, że z definicji α wynika zależność

$$0 < (x - (\alpha + \frac{1}{n})u)^- = ((\alpha + \frac{1}{n})u - x)^+ \leqslant (1 + \alpha)u \quad \forall\, n.$$

Z oczywistych powodów dla każdego n mamy również nierówność $0 \leqslant (x - (\alpha + \frac{1}{n})u)^+ \wedge u \leqslant (1 + \alpha)u$. Ponadto $(1 + \alpha)u$ jest atomem oraz $((x - (\alpha + \frac{1}{n})u)^+ \wedge u) \wedge ((x - (\alpha + \frac{1}{n})u)^-) = 0$. Zatem $(x - (\alpha + \frac{1}{n})u)^+ \wedge u = 0$ dla każdego n. Ponieważ $\alpha + \frac{1}{n} \downarrow \alpha$ i operacje kratowe są porządkowo ciągłe, więc $(x - \alpha u) \wedge u = (x - \alpha u)^+ \wedge u = 0$, a to oznacza, że $x - \alpha u \in A^d$. □

Definicja 6.9. Krata wektorowa jest **bezatomowa** jeżeli nie ma w niej żadnych atomów.

Lemat 6.10. *Dla kraty Banacha E zachodzą następujące warunki:*

(1) *Jeżeli E ma porządkowo ciągłą normę i jest bezatomowa, to E^* jest bezatomową kratą Banacha.*
(2) *Jeżeli E^* jest bezatomowa, to E również.*

Dowód. (1) Dla dowodu nie wprost załóżmy, że $0 < \phi \in E^*$ jest atomem. Z poprzedniego lematu wynika zatem implikacja:

$$\psi \in E^*,\ 0 \leqslant \psi \leqslant \phi \implies \exists\, \lambda \geqslant 0 : \psi = \lambda\phi.$$

Ponieważ ψ jest dodatni, więc zbiór $N_\phi := \{x \in E : \phi(|x|) = 0\}$ jest ideałem porządkowym (nazywamy go **ideałem zerowym** ϕ). Porządkowa ciągłość normy w E pociąga za sobą porządkową ciągłość ϕ, a zatem N_ϕ jest ideałem zamkniętym. Na mocy wniosku 6.5, E jest porządkowo zupełna, skąd w oparciu o twierdzenie 4.17 wnioskujemy, że N_ϕ jest projekcyjny. A więc przyjmując oznaczenie $C_\phi := N_\phi^d$, otrzymujemy równość $E = N_\phi \oplus C_\phi$. Z założenia $\phi > 0$ wynika $C_\phi \neq \{0\}$, a zatem istnieje $u > 0$ takie, że $u \in C_\phi$. Wykażemy, że u jest atomem w E.

Niech $0 < x \leqslant u$, $0 \leqslant y \leqslant u$ oraz $x \wedge y = 0$. Chcemy dowieść, że $y = 0$. Niech P_x oznacza projekcję na ideał zamknięty B_x generowany przez x. Wtedy $\phi \circ P_x \in E^*$ (bo $\|P_x\| \leqslant 1$) i $0 \leqslant \phi \circ P_x \leqslant \phi$. Zatem na mocy lematu 6.8 istnieje $\lambda \geqslant 0$ taka, że $\phi \circ P_x = \lambda\phi$. Z warunku $0 < \phi(x) = (\phi \circ P_x)(x) = \lambda\phi(x)$ otrzymujemy $\lambda = 1$, skąd $\phi = \phi \circ P_x$. W konsekwencji $\phi(y) = \phi \circ P_x(y) = \phi(0) = 0$ i ze ścisłej dodatniości ϕ na C_ϕ wnioskujemy, że $y = 0$. Zatem u jest atomem, co prowadzi do sprzeczności z założeniem.

(2) Dla dowodu nie wprost załóżmy, że $0 < u \in E$ jest atomem. Wtedy przestrzeń $B := \{\lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}$ jest na mocy lematu 6.8 ideałem projekcyjnym. Oznaczając $A := B^d$ otrzymujemy $E = A \oplus B$. To oznacza, że E jest topologicznie i kratowo izomorficzna z kratą Banacha $A \oplus \mathbb{R}$. A więc E^* jest kratowo izomorficzna z $A^* \oplus \mathbb{R}$, która posiada atomy. Fakt ten prowadzi do sprzeczności z założeniem. □

7. Zespolone kraty Banacha

Standardowa kompleksyfikacja przestrzeni unormowanych: Jeżeli X jest rzeczywistą przestrzenią wektorową, to przez kompleksyfikację X rozumiemy zespoloną przestrzeń wektorową zdefiniowaną następująco:

$$X_C = X \oplus iX =: \{x + iy : x, y \in X\}$$

ze standardowo zdefiniowanymi operacjami dodawania wektorów i mnożenia przez skalary zespolone. Wtedy X może być identyfikowana z rzeczywistą podprzestrzenią $X + i\{0\} \subset X_C$.

Jeżeli X jest przestrzenią unormowaną, to jej normę możemy rozszerzyć na całą przestrzeń X_C w następujący sposób:

$$\|z\| := \sup_{\theta\in[0,2\pi]} \|x\cos\theta + y\sin\theta\|$$

dla $z = x + iy \in X_C$. Zauważmy, że

$$\frac{1}{2}(\|x\| + \|y\|) \leqslant \|z\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

dla $z = x + iy \in X_C$.

Każdy operator liniowy $T : X \to Y$ pomiędzy dwiema rzeczywistymi przestrzeniami wektorowymi ma naturalne rozszerzenie do zespolonego operatora liniowego $T_C : X_C \to Y_C$ określone wzorem

$$T_C(x + iy) := Tx + iTy. \tag{7.1}$$

LEMAT 7.1. *Jeżeli X, Y są przestrzeniami unormowanymi, a $T : X \to Y$ operatorem liniowym ograniczonym, to operator $T_C : X_C \to Y_C$ jest także ograniczony i spełnia równość $\|T_C\| = \|T\|$.*

DOWÓD. - ćwiczenie. □

Zespolone kraty Banacha - w przypadku kraty Banacha E na E_C definiujemy równoważną normę w inny niż opisany powyżej standardowy sposób.

Załóżmy najpierw, że $E = C(\Omega)$ dla pewnej przestrzeni zwartej Ω. (Przez $C(\Omega)$ rozumiemy przestrzeń funkcji ciągłych na Ω o wartościach rzeczywistych.) Wtedy dla $f, g \in C(\Omega)$ oraz $\omega \in \Omega$ mamy

$$\sup_{\theta\in[0,2\pi]} (f(\omega)\cos\theta + g(\omega)\sin\theta) = \sup_{\theta\in\mathbb{R}}(f(\omega)\cos\theta + g(\omega)\sin\theta) = \sqrt{(f(\omega))^2 + (g(\omega))^2}.$$

Stąd

$$\sup_{\theta\in[0,2\pi]} (f\cos\theta + g\sin\theta) = \sup_{\theta\in\mathbb{R}}(f\cos\theta + g\sin\theta) = \sqrt{f^2 + g^2} = |f + ig|,$$

gdzie supremum w $C(\Omega)$ jest rozumiane w zwykłym kratowym sensie.

Wróćmy teraz do przypadku ogólnego rzeczywistej kraty Banacha E.

TWIERDZENIE 7.2. *Dla każdego elementu $u \in E$ ideał E_u jest kratowo izomorficzny z $C(\Omega)$ dla pewnej przestrzeni zwartej Ω.*

DOWÓD. Bez dowodu. □

Niech $x, y \in E$, niech $u := |x|+|y|$. Dla $z := x+iy$ jego moduł definiujemy następująco:

$$|z| := \sup_{\theta\in[0,2\pi]} (x\cos\theta + y\sin\theta).$$

Na mocy twierdzenia 7.2, powyższa wartość jest poprawnie określona. Zauważmy, że (ćwiczenie)

$$|z| = |\pm x \pm iy| = |\pm |x| \pm i|y|\,| = |\pm y \pm ix| = |\pm |y| \pm i|x|\,| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Stwierdzenie 7.3. *Jeżeli $z_1, z_2, z_3 \in E_C$ oraz $\lambda \in \mathbb{C}$, to*

(1) $|z| \geqslant 0$ *oraz* $|z| = 0 \iff z = 0$*;*
(2) $|\lambda z| = |\lambda| \cdot |z|$*;*
(3) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

A więc odwzorowanie $\|\cdot\|_C : E_C \to \mathbb{R}$ określone definicją

$$\|z\|_C := \|\,|z|\,\|, \tag{7.2}$$

jest normą. Ponadto z nierówności $|x|, |y| \leqslant |z|$ oraz (3) wynika warunek

$$\frac{1}{2}(\|x\| + \|y\|) \leqslant \|z\|_C \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

Wniosek 7.4.

(1) *Norma $\|\cdot\|$ jest równoważna standardowej normie na E_C zadanej wzorem*

$$\|z\| := \sup_{\theta\in[0,2\pi]} \|x\cos\theta + y\sin\theta\|.$$

(2) *Jeżeli $x \in E$, to $\|x\|_C = \|x\|$.*
(3) *Jeżeli $z_1, z_2 \in E_C$ oraz $|z_1| \leqslant |z_2|$, to $\|z_1\|_C \leqslant \|z_2\|_C$.*

Począwszy od teraz, przez **kompleksyfikację** E będziemy rozumieć przestrzeń E_C z normą określoną wzorem (7.2).

Definicja 7.5. Przez **zespoloną kratę Banacha** rozumiemy zespoloną przestrzeń Banacha postaci $E_C = E \oplus iE$, gdzie E jest rzeczywistą kratą Banacha.

Liniowa izometria $T : E_C \to F_C$ pomiędzy dwiema zespolonymi kratami Banacha jest **izometrią kratową**, jeżeli $|Tz| = T|z|$ dla $z \in E_C$.

Dwie zespolone kraty Banacha są kratowo izometryczne, jeżeli istnieje pomiędzy nimi izometria kratowa.

Lemat 7.6. *Jeżeli $T : E \to F$ jest suriektywną izometrią kratową, to $T_C : E_C \to F_C$ zadane wzorem (7.1) jest też suriektywną izometrią kratową.*

Dowód. Weźmy $z = x + iy \in E_C$. Zdefiniujmy

$$D := \{\bigvee_{i=1}^{n} (x\cos\theta_i + y\sin\theta_i) : \theta_i \in \mathbb{R},\ i = 1, ..., n\}.$$

Wtedy $D \uparrow |z|$. Ponieważ T jest porządkowo ciągły (stwierdzenie 3.11), więc $T(D) \uparrow T|z|$. Z drugiej strony dla $w = \bigvee_{i=1}^{n}(x\cos\theta_i + y\sin\theta_i) \in D$, $T(w) = \bigvee_{i=1}^{n}((Tx)\cos\theta_i + (Ty)\sin\theta_i)$, a więc $T(D) \uparrow |T_C z|$. Zatem $|T_C z| = T|z|$ dla $z \in E_C$. W konsekwencji

$$\|T_C z\| = \|\,|T_C z|\,\| = \|T|z|\,\| = \|\,|z|\,\| = \|z\|,$$

co oznacza, że T_C jest suriektywną izometrią kratową. □

DEFINICJA 7.7. Niech E, F będą rzeczywistymi kratami Banacha. Dla operatora $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ przez normę $\|T\|_C$ rozumiemy operatorową normę operatora $T_C : E_C \to F_C$, tzn.

$$\|T\|_C := \sup_{\|z\|_C \leqslant 1} \|T_C z\|_C.$$

WNIOSEK 7.8. *Dla* $T : E \to F$ *mamy warunek* $\|T\| \leqslant \|T\|_C \leqslant 2\|T\|$.

LEMAT 7.9. *Jeżeli* $T : E \to F$ *jest operatorem dodatnim, to* $|T_C z| \leqslant T|z|$ *dla* $z \in E_C$.

DOWÓD. Niech $z = x + iy \in E_C$. Wtedy $T_C z = Tx + iTy$ oraz

$$(Tx)\cos\theta + (Ty)\sin\theta = T(x\cos\theta + y\sin\theta) \leqslant T|z|,$$

skąd $|T_C z| = \sup_{\theta \in [0,2\pi]}((Tx)\cos\theta + (Ty)\sin\theta) \leqslant T|z|$. □

WNIOSEK 7.10. *Jeżeli* T *jest dodatni, to* $\|T\| = \|T\|_C$.

STWIERDZENIE 7.11. *Jeżeli* E, F *są kratami Banacha, to*

(1) $\mathcal{L}(E_C, F_C) = \mathcal{L}(E, F) \oplus i\mathcal{L}(E, F)$,
(2) *każdy element* $\mathcal{L}(E_C, F_C)$ *jest postaci* $T + iS$, *gdzie* $T, S \in \mathcal{L}(E, F)$ *przy czym*
(3) $(T + iS)(x + iy) = (Tx - Sy) + i(Sx + Ty)$ *dla* $z = x + iy \in E_C$.

DEFINICJA 7.12. Operator $T + iS \in \mathcal{L}(E_C, F_C)$ jest **regularny**, jeżeli $T, S \in \mathcal{L}(E, F)$ są regularne.

STWIERDZENIE 7.13. $\mathcal{L}_r(E_C, F_C) = \mathcal{L}_r(E, F) \oplus i\mathcal{L}_r(E, F)$. *Jeżeli* F *jest porządkowo zupełna, to* $\mathcal{L}_r(E_C, F_C)$ *z r-normą jest zespoloną kratą Banacha.*

DOWÓD. Fakt, że $\mathcal{L}_r(E_C, F_C)$ z r-normą jest zespoloną kratą Banacha wynika z twierdzenia 5.7. □

TWIERDZENIE 7.14. *Niech* E, F *będą rzeczywistymi kratami Banacha, przy czym* F *kratą porządkowo zupełną, niech* $\mathcal{T} = T + iS \in \mathcal{L}_r(E_C, F_C)$. *Wtedy* $|\mathcal{T}|$ *spełnia równanie Riesza-Kantorowicza, tzn. dla każdego* $u \in E^+$ *mamy*

$$|\mathcal{T}|u = |T + iS|u = \sup_{|z| \leqslant u} |(T + iS)z| = \sup_{|x+iy| \leqslant u} |(T + iS)(x + iy)|.$$

DOWÓD. Bez dowodu. □

WNIOSEK 7.15. *Jeżeli* E, F *są kratami Banacha, przy czym* F *jest porządkowo zupełna oraz* $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(E_C, F_F)$, *to* $|\mathcal{T}z| \leqslant |\mathcal{T}|(|z|)$ *dla* $z \in E_C$.

WNIOSEK 7.16. *Jeżeli* E *jest kratą Banacha, to* $E_C^* = E^* \oplus iE^*$. *Ponadto dla* $f \in E_C^*$, $u \in E^+$ *mamy* $|f|(u) = \sup_{|z| \leqslant u} |f(z)|$.

WNIOSEK 7.17. *Jeżeli* E *jest porządkowo zupełną kratą Banacha, to* $\mathcal{L}_r(E_C)$ *z r-normą jest zespoloną algebrą Banacha z jedynką.*

DOWÓD. Ze stwierdzenia 7.13 wynika równość $\mathcal{L}_r(E_C) = \mathcal{L}_r(E) \oplus i\mathcal{L}_r(E)$ oraz fakt, że $\mathcal{L}_r(E_C)$ z r-normą jest zespoloną kratą Banacha. Niech $\mathcal{S}, \mathcal{T} \in \mathcal{L}_r(E_C)$ oraz $|z| \leqslant u$ dla pewnego $u \in E^+$. Wtedy korzystając z lematu 7.9, otrzymujemy

$$|(\mathcal{S}\mathcal{T})z| = |\mathcal{S}(\mathcal{T}z)| \leqslant |\mathcal{S}|(|\mathcal{T}z|) \leqslant |\mathcal{S}|(|\mathcal{T}|u)| = (|\mathcal{S}||\mathcal{T}|)u,$$

skąd na mocy twierdzenia 7.14 mamy $|\mathcal{S}\mathcal{T}| \leqslant |\mathcal{S}||\mathcal{T}|$. W konsekwencji

$$\|\mathcal{S}\mathcal{T}\|_r = \|\,|\mathcal{S}\mathcal{T}|\,\| = \|\,|\mathcal{S}|\,|\mathcal{T}|\,\| \leqslant \|\,|\mathcal{S}|\,\| \cdot \|\,|\mathcal{T}|\,\| = \|\mathcal{S}\|_r \cdot \|\mathcal{T}\|_r.$$

Zatem $\mathcal{L}_r(E_C)$ jest zespoloną algebrą Banacha z jedynką. □

DEFINICJA 7.18. Jeżeli E, F są kratami Banacha, to operator $S : E_C \to F_C$ jest **zdominowany** przez dodatni operator $T : E \to F$, gdy $|Sz| \leqslant T|z|$ dla $z \in E_C$.

Wtedy S automatycznie jest ciągły.

8. Rozszerzenia operatorów

DEFINICJA 8.1. Odwzorowanie $p : X \to Z$ pomiędzy dwiema rzeczywistymi przestrzeniami wektorowymi jest **subliniowe**, gdy

(a) $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$ dla $x, y \in X$.
(b) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ dla $\lambda \geqslant 0$, $x \in X$.

TWIERDZENIE 8.2. *(Hahn-Banach-Kantorowicz) Niech X będzie przestrzenią wektorową, Y jej podprzestrzenią, F porządkowo zupełną kratą wektorową, a $p : X \to F$ odwzorowaniem subliniowym. Jeżeli operator $T : Y \to F$ spełnia nierówność $Ty \leqslant p(y)$ dla $y \in Y$, to istnieje operator $S : X \to F$ będący rozszerzeniem T i spełniający nierówność $Sx \leqslant p(x)$ dla $x \in X$.*

DOWÓD. Ćwiczenie w oparciu o dowód klasycznego twiedzenia Hahna-Banacha. □

DEFINICJA 8.3. Mówimy, że podprzestrzeń wektorowa $Y \subset X$ **majoryzuje** przestrzeń liniową częściowo uporządkowaną X, jeżeli $\forall\, x \in X\ \exists\, y \in Y$ takie, że $x \leqslant y$.

TWIERDZENIE 8.4. *Niech Y będzie majoryzującą podprzestrzenią wektorową przestrzeni liniowej częściowo uporządkowanej X. Wtedy każdy dodatni operator liniowy określony w Y o wartościach w porządkowo zupełnej kracie wektorowej F ma dodatnie liniowe rozszerzenie do całej przestrzeni X.*

DOWÓD. Niech $T : Y \to F$ będzie operatorem dodatnim. Określamy odwzorowanie $p : X \to F$ jak następuje:

$$p(x) := \inf\{Ty : y \in Y,\ y \geqslant x\}.$$

Aby wykazać istnienie powyższego infimum, weźmy dowolny $x \in X$. Ponieważ Y majoryzuje X, więc istnieje $z \in Y$ takie, że $z \geqslant -x$ czyli $-z \leqslant x$. Podobnie istnieje $y \in Y$ takie, że $y \geqslant x$. Z dodatniości T wynika nierówność $-Tz = T(-z) \leqslant Ty$. Zatem zbiór $\{Ty : y \in Y,\ y \geqslant x\}$ jest niepusty i ograniczony z dołu. Na mocy porządkowej zupełności F posiada więc infimum.

Jak łatwo stwierdzić, p jest odwzorowaniem subliniowym spełniającym dla $y \in Y$ równość $Ty = p(y)$. Z twierdzenia 8.2 wynika więc istnienie operatora liniowego $S : X \to F$ będącego rozszerzeniem T i spełniającego nierówność $Sx \leqslant p(x)$ dla $x \in X$. Jeżeli $x \in X^+$, to $-x \leqslant 0$, skąd $-Sx = S(-x) \leqslant p(-x) \leqslant T(0) = 0$ (ostatnia nierówność wynika z definicji p). Zatem $Sx \geqslant 0$, a więc S jest dodatnim rozszerzeniem T. □

ROZDZIAŁ 2

Algebry Banacha

Przez algebrę Banacha rozumiemy zespoloną przestrzeń Banacha A, która jest równocześnie algebrą, przy czym między mnożeniem a normą zachodzi związek

$$\|fg\| \leqslant \|f\|\|g\|, \quad f, g \in A.$$

Algebra Banacha jest przemienna, jeżeli $fg = gf$ dla $f, g \in A$, posiada jedynkę, gdy istnieje element $1 \in A$ taki, że $\|1\| = 1$ oraz $1f = f1 = f$ dla $f \in A$. W dalszej części wykładu przez algebrę Banacha będziemy rozumieć algebrę Banacha z jedynką o ile wyraźnie nie zostanie powiedziane, że jest inaczej.

1. Widmo i rezolwenta

Element $f \in A$ jest odwracalny, jeżeli istnieje $g \in A$ takie, że $fg = 1$. Taki element jest zawsze jedyny. Oznaczamy go: f^{-1} lub $1/f$. Przez A^{-1} oznaczamy zbiór wszystkich elementów odwracalnych w A.

Definicja 1.1. Rezolwentą elementu $f \in A$ nazywamy zbiór

$$\rho(f) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - f \text{ jest odwracalny}\},$$

natomiast widmo $f \in A$ jest to zbiór $\sigma(f) := \mathbb{C} \setminus \rho(f)$.

Definicja 1.2. Mówimy, że funkcja $g : \mathbb{C} \supset V \to A$ jest *silnie analityczna* lub *analityczna* (V - zbiór otwarty), jeżeli daje się lokalnie przedstawić w postaci szeregu potęgowego zbieżnego w normie. Funkcja $g : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to A$ jest *silnie analityczna* lub *analityczna* w nieskończoności, jeżeli dla λ większych na moduł od pewnej stałej dodatniej daje się przedstawić w postaci szeregu potęgowego zbieżnego w normie.

Mówimy, że funkcja $g : \mathbb{C} \supset V \to A$ jest *słabo analityczna*, jeżeli $\varphi \circ g : \mathbb{C} \supset V \to \mathbb{C}$ jest analityczna dla każdego fukcjonału φ liniowego i ciągłego na A.

Twierdzenie 1.3. *Widmo każdego elementu $f \in A$ jest niepustym, zwartym podzbiorem $\mathbb{C}$. Odwzorowanie $\rho(f) \ni \lambda \to (\lambda - f)^{-1}$ jest funkcją analityczną.*

Dowód. Gdy $\lambda > \|f\|$, to $g(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} f^n/\lambda^{n+1}$ jest funkcją analityczną w nieskończoności. Z bezpośredniego przeliczenia otrzymujemy $g(\lambda)(\lambda - f) = 1$, tzn. $g(\lambda) = (\lambda - f)^{-1}$. Zatem $\sigma(f)$ jest zawarte w kole domkniętym o promieniu $\|f\|$.

Załóżmy, że λ_0 należy do rezolwenty f. Wtedy $h(\lambda) := \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_0 - \lambda)^n(\lambda_0 - f)^{-(n+1)}$ jest analityczna w kole otwartym $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| < 1/\|(\lambda_0 - f)^{-1}\|\}$. Z bezpośredniego przeliczenia otrzymujemy $h(\lambda) = (\lambda - f)^{-1}$. Zatem $\rho(f)$ jest zbiorem otwartym i $(\lambda - f)^{-1}$ jest analityczna w $\rho(f)$. A więc widmo f, jako zbiór domknięty i ograniczony jest zwarte.

Dla każdego liniowego, ciągłego funkcjonału φ odwzorowanie

$$\rho(f) \ni \lambda \to \varphi((\lambda - f)^{-1}) \in \mathbb{C}$$

jest funkcją analityczną znikającą w nieskończoności, a zatem ograniczoną. Gdyby widmo f było puste, to funkcja ta byłaby analityczna i ograniczona na całym $\mathbb{C}$, a więc na mocy twierdzenia Liouville'a byłaby identycznie równa zero. Z twierdzenia Hahna-Banacha wyniłoby wtedy, że funkcja $\lambda \to (\lambda - f)^{-1}$ jest identycznie równa zero, co jest niemożliwe. Zatem $\sigma(f)$ musi być niepuste. □

Wnioski z dowodu powyższego twierdzenia:

Wniosek 1.4. $\lambda \in \sigma(f) \implies |\lambda| \leqslant \|f\|$.

Wniosek 1.5. $\lambda \in \rho(f) \implies dist(\lambda, \sigma(f)) \geqslant 1/\|(\lambda - f)^{-1}\|$.

Twierdzenie 1.6. *Przemienna algebra Banacha z jedynką, która jest ciałem jest izometrycznie izomorficzna z ciałem liczb zespolonych.*

Dowód. Weźmy dowolne $f \in A$. Na mocy twierdzenia 1.3, widmo f jest niepuste, a więc istnieje λ takie, że $\lambda - f$ jest nieodwracalne. Ponieważ A jest ciałem, $\lambda - f = 0$ czyli $\lambda = f$, co kończy dowód izomorfizmu. Izometryczność wynika z faktu, że jedynka w A ma normę 1. □

2. Przestrzeń ideałów maksymalnych

Ideał J algebry A jest z definicji *maksymalny*, gdy $J \neq A$ oraz J nie jest zawarty w żadnym ideale *właściwym* (tzn. różnym od A) algebry A. Zbiór wszystkich ideałów maksymalnych A nazywamy *przestrzenią ideałów maksymalnych* A i oznaczamy symbolem $\mathcal{M}_A$.

Lemat 2.1. *Każdy ideał właściwy jest zawarty w pewnym ideale maksymalnym. Ideał J jest maksymalny wtedy i tylko wtedy, gdy A/J jest ciałem.*

Dowód. Dla ideału J oraz $g \notin J$ zbiór $J + Ag$ również jest ideałem. Gdy J jest maksymalny, to $J + Ag = A$, a to zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $f \in A$ oraz $h \in J$ takie, że $h + fg = 1$. Ostatni warunek jest równoważny istnieniu takich $f \in A$, $h \in J$, że $(J + f)(J + g) = J + fg = J + 1$, a zatem odwracalności każdego niezerowego elementu A/J. (Łatwo sprawdzić, że $J + 1$ jest jedynką w A/J.) □

Oznaczmy przez G zbiór elementów odwracalnych algebry A.

Twierdzenie 2.2. *G jest zbiorem otwartym w A.*

Dowód. Jeżeli $f \in A$ oraz $\|1 - f\| < 1$, to 1 należy do rezolwenty $1 - f$ na mocy wniosku 1.4. A więc $f = 1 - (1 - f)$ jest odwracalny czyli $f \in G$. Zatem

$$U := \{f \in A : \|1 - f\| < 1\} \subset G.$$

Dla $f \in G$ odwzorowanie $g \to fg$ jest homeomorfizmem A na siebie, a U jest otwarty, zatem zbiór fU jest również otwarty. Ponieważ $1 \in U$, więc $f \in fU \subset G$, co oznacza, że fU jest otwartym otoczeniem f zawartym w G. Stąd wnioskujemy, że G jest otwarty. □

Wniosek 2.3. *Jeżeli J jest ideałem właściwym, to jego domknięcie też.*

Dowód. Jeżeli J jest właściwy, to $J \cap G = \emptyset$. Ponieważ G jest otwarty, więc również $\overline{J} \cap G = \emptyset$, a zatem $\overline{J} \neq A$. □

TWIERDZENIE 2.4. *Jeżeli J jest ideałem maksymalnym, to J jest domknięty oraz A/J jest izometrycznie izomorficzne z ciałem $\mathbb{C}$.*

DOWÓD. Domkniętość J wynika z wniosku 2.3. Algebra A/J jest izomorficzna z $\mathbb{C}$ na mocy twierdzenia 1.6 i lematu 2.1. Ponieważ J jest domknięty, więc A/J jest przestrzenią Banacha z normą $\|f+J\| = \inf\{\|f+g\| : g \in J\}$. Z definicji normy ilorazowej wynika nierówność

$$\|fg+J\| \leqslant \|fg+fJ+gJ+J\| = \|(f+J)g+(f+J)J\| = \|(f+J)(g+J)\| \leqslant \|f+J\|\|g+J\|.$$

Zatem A/J jest przemienną algebrą Banacha z jedynką $1+J$. Jeżeli $g \in J$ to z faktu, że zbiór U zdefiniowany w dowodzie twierdzenia 2.2 jest zawarty w G wynika nierówność $\|1+g\| \geqslant 1$, skąd $\|1+J\| = 1$. To oznacza, że A/J jest algebrą Banacha z jedynką i równocześnie dowodzi izometryczności A/J z $\mathbb{C}$ (dlaczego - ćwiczenie). $\square$

Jeżeli J jest ideałem maksymalnym, to odwzorowanie

$$\Phi_J : A \to A/J \sim \mathbb{C}$$

jest homomorfizmem algebr, a J jest jego jądrem. Homomorfizm ten jest ciągły, bo J jest domknięty. Ze względu na utożsamienie A/J z $\mathbb{C}$ jest to funcjonał liniowo-multyplikatywny.

Z drugiej strony, gdy $\varphi : A \to \mathbb{C}$ jest funkcjonałem liniowo-multyplikatywnym, to $A/\ker\varphi$ jest izomorficzne z $\mathbb{C}$, a zatem $A/\ker\varphi$ jest ciałem, a więc na mocy lematu 2.1, $\ker\varphi$ jest ideałem maksymalnym.

Otrzymaliśmy w ten sposób bijekcję $\varphi \longleftrightarrow \ker\varphi$ między zbiorem funkcjonałów multyplikatywnych a zbiorem ideałów maksymalnych.

LEMAT 2.5. *Jeżeli φ jest różnym od zera funkcjonałem liniowo-multyplikatywnym, to φ jest ciągły oraz $\varphi(1) = 1 = \|\varphi\|$.*

DOWÓD. Funkcjonał φ jest ciągły, bo $\ker\varphi$ domknięte. Z równości $\varphi(1)^2 = \varphi(1)$ wnioskujemy, że $\varphi(1) = 1$ lub $\varphi(1) = 0$. Ponieważ $\varphi(1) \neq 0$, więc $\varphi(1) = 1$.

Niech $f \in A$. Gdy $|\lambda| > \|f\|$, to $\lambda - f$ jest elementem odwracalnym. Wtedy

$$\varphi(\lambda - f)\varphi((\lambda - f)^{-1}) = \varphi(1) = 1,$$

skąd $\varphi(\lambda - f) \neq 0$, a zatem $\varphi(f) \neq \lambda$. Wynika stąd, że $|\varphi(f)| \leqslant \|f\|$ dla każdego elementu $f \in A$. Zatem $\|\varphi\| \leqslant 1$, a ponieważ $\varphi(1) = 1$, więc $\|\varphi\| = 1$. $\square$

Przez $\mathcal{M}_A$ oznaczaliśmy zbiór ideałów maksymalnych algebry A. Ze względu na opisane wcześniej utożsamienienie, symbolu tego będziemy używać również na oznaczenie zbioru funkcjonałów liniowo-multyplikatywnych. Możemy zatem napisać inkluzję

$$\mathcal{M}_A \subset \{\varphi \in A^* : \|\varphi\| = 1\}.$$

Topologię na $\mathcal{M}_A$ definiujemy jako zawężenie $*$-słabej topologii w A^* do $\mathcal{M}_A$.

TWIERDZENIE 2.6. *$\mathcal{M}_A$ jest przestrzenią zwartą.*

DOWÓD. Jeżeli $\{\varphi_\alpha\}$ jest ciągiem uogólnionym w $\mathcal{M}_A$ oraz $\varphi_\alpha \to \varphi$ $*$-słabo, to z elementarnych rachunków wynika, że φ jest też funkcjonałem liniowo-multyplikatywnym, czyli $\varphi \in \mathcal{M}_A$. Zatem $\mathcal{M}_A$ jest domkniętym podzbiorem kuli jednostkowej w A^*, która jest zwarta w $*$-słabej topologii na mocy twierdzenia Banacha-Alaoglu. A więc zbiór $\mathcal{M}_A$ też jest zwarty. $\square$

DEFINICJA 2.7. *Transformata Gelfanda* elementu $f \in A$ jest to funkcja $\hat{f} : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ określona w sposób następujący:

$$\hat{f}(\varphi) := \varphi(f) \qquad \varphi \in \mathcal{M}_A.$$

Jeżeli przez $\iota : A \to (A^*)^*$ określimy kanoniczne zanurzenie A w jej drugą dualną, to transformata Gelfanda elementu $f \in A$ okazuje się zawężeniem $\iota(f)$ do $\mathcal{M}_A$. Oznaczmy $\hat{A} := \{\hat{f} : f \in A\}$. Dla dowolnej przestrzeni zwartej X przez $C(X)$ oznaczamy algebrę fukcji ciągłych na X o wartościach zespolonych.

TWIERDZENIE 2.8. *Transformata Gelfanda jest homomorfizmem $A \to \hat{A} \subset C(\mathcal{M}_A)$. Algebra $\hat{A}$ rozdziela punkty $\mathcal{A}$, zawiera stałe oraz*

$$\|\hat{f}\| \leqslant \|f\|, \qquad f \in A.$$

DOWÓD. Weźmy $\varphi \in \mathcal{M}_A$. Wtedy $|\hat{f}(\varphi)| = |\varphi(\hat{f})| \leqslant \|f\|$, bo $\|\varphi\| = 1$. Zatem $\|\hat{f}\| \leqslant \|f\|$. Ponieważ transformata Gelfanda jedynki w A jest funkcją identycznie równą jeden na $\mathcal{M}_A$, więc $\hat{A}$ zawiera stałe. Niech $\varphi_1 \in \mathcal{M}_A$, $\varphi_2 \in \mathcal{M}_A$. Jeżeli $\hat{f}(\varphi_1) = \hat{f}(\varphi_2)$ dla wszystkich $f \in A$, to również $\varphi_1(f) = \hat{f}(\varphi_1) = \hat{f}(\varphi_2) = \varphi_2(f)$ dla wszystkich $f \in A$, skąd $\varphi_1 = \varphi_2$. Zatem dla $\varphi_1 \neq \varphi_2$ istnieje $f \in A$ takie, że $\hat{f}(\varphi_1) \neq \hat{f}(\varphi_2)$. □

TWIERDZENIE 2.9. *Dla $f \in A$ zachodzi równość $\sigma(f) = \hat{f}(\mathcal{M}_A)$.*

DOWÓD. Niech $\lambda \in \sigma(f)$. Wtedy $\lambda - f$ jest elementem nieodwracalnym w A, a zatem $(\lambda - f)A$ jest ideałem właściwym w A. Zawarty jest więc w pewnym ideale maksymalnym J, skąd w szczególności wynika, że $\lambda - f \in J$. Ponieważ J jest jądrem pewnego funkcjonału liniowo multyplikatywnego φ, więc $\varphi(\lambda - f) = 0$, skąd $\hat{f}(\varphi) = \varphi(f) = \lambda$. Otrzymaliśmy zatem inkluzję $\sigma(f) \subset \hat{f}(\mathcal{M}_A)$.

Niech $\lambda \in \hat{f}(\mathcal{M}_A)$. Wtedy istnieje $\varphi \in \mathcal{M}_A$ takie, że $\varphi(f) = \hat{f}(\varphi) = \lambda$. Zatem $\varphi(\lambda - f) = 0$, co oznacza, że element $\lambda - f$ jest nieodwracalny, czyli $\lambda \in \sigma(f)$. □

3. Przykłady algebr Banacha

PRZYKŁAD 3.1. Algebra $C(X)$ funkcji ciągłych na zbiorze zwartym X o wartościach zespolonych jest algebrą Banacha z normą

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|, \qquad f \in C(X).$$

Każdy punkt $x \in X$ określa funkcjonał liniowo-multyplikatywny $\varphi_x \in \mathcal{M}_{C(X)}$ w sposób następujący

$$\varphi_x(f) = f(x), \qquad f \in C(X).$$

TWIERDZENIE 3.2. *Każdy funkcjonał $\varphi \in \mathcal{M}_{C(X)}$ jest ewaluacją φ_x w pewnym punkcie $x \in X$.*

DOWÓD. Załóżmy, że $\varphi \in \mathcal{M}_{C(X)}$ jest różny od każdego φ_x dla $x \in X$. Wtedy dla każdego $x \in$ istnieje $f_x \in C(X)$ taka, że $f_x(x) \neq 0$ oraz $\varphi(f_x) = 0$. Zatem funkcja $|f_x|^2$ jest dodatnia w pewnym otoczeniu x, a $\varphi(|f_x|^2) = \varphi(f_x)\varphi(\bar{f}_x) = 0$. Korzystając ze zwartości zbioru X możemy znaleźć punkty $x_1, \ldots, x_n \in X$ takie, że funkcja $g := |f_{x_1}|^2 + \cdots + |f_{x_n}|^2$ jest dodatnia na X. A więc g jest odwracalna w $C(X)$, co jest sprzeczne z równością $\varphi(g) = 0$. □

Powyższe twierdzenie dowodzi homeomorficzności zbiorów X i $\mathcal{M}_{C(X)}$.

W dalszej części wykładu przez ∂E będziemy oznaczać brzeg topologiczny podzbioru E przestrzeni topologicznej. Przez Δ będziemy oznaczać domknięte koło jednostkowe na płaszczyźnie zespolonej.

Przykład 3.3. Niech $P(\partial\Delta)$ będzie podalgebrą $C(\partial\Delta)$ złożoną z funkcji będącymi jednostajnymi granicami wielomianów na $\partial\Delta$. Jeżeli ciąg wielomianów w_n zmierza jednostajnie do $f \in P(\partial\Delta)$, to z zasady maksimum wynika, że jest on zbieżny jednostajnie na Δ do pewnej funkcji $\tilde{f}$ ciągłej na Δ i analitycznej we wnętrzu Δ. Z oczywistych powodów zawężenie $\tilde{f}$ do $\partial\Delta$ jest równe f.

Każdy punkt $\lambda \in \Delta$ wyznacza jednoznacznie funkcjonał liniowo-multyplikatywny φ_λ na $P(\partial\Delta)$ zadany wzorem $\varphi_\lambda(f) = \tilde{f}(\lambda)$, gdzie $f \in P(\partial\Delta)$, a $\tilde{f}$ jest rozszerzeniem f opisanym powyżej.

Załóżmy teraz, że $\varphi \in \mathcal{M}_{P(\partial\Delta)}$. Niech $\lambda = \varphi(z)$, gdzie z oznacza funkcję $z \to z$. Ponieważ $\|z\| = 1$, na mocy wniosku 1.4 i twierdzenia 2.9, $|\lambda| \leqslant 1$, tzn. $\lambda \in \Delta$. Również dla dowolnego wielomianu w mamy $\varphi(w(\lambda)) = w(\lambda) = \varphi_\lambda(w)$. Ponieważ wielomiany są gęste w $P(\partial\Delta)$, więc $\varphi = \varphi_\lambda$. Zatem Δ możemy identyfikować z $\mathcal{M}_{P(\partial\Delta)}$.

Ćwiczenie 3.4. Wykazać równoważność poniższych warunków:

(1) $f \in P(\partial\Delta)$
(2) f posiada rozszerzenie ciągłe na Δ i analityczne w $\mathrm{int}\Delta$
(3) ujemne współczynniki Fouriera funkcji f zerują się

Wskazówka: skorzystać z twierdzenia Fejera.

Przykład 3.5. Podobnie jak w poprzednim przykładzie, niech $P(\partial\Delta \times \partial\Delta)$ będzie podalgebrą $C(\partial\Delta\times\partial\Delta)$ złożoną z funkcji będącymi jednostajnymi granicami wielomianów dwóch zmiennych na $\partial\Delta \times \partial\Delta$. Wykazać jako ćwiczenie, że widmem tej algebry jest zbiór $\Delta \times \Delta$.

Przykład 3.6. Algebra operatorów ograniczonych na przestrzeni Banacha z normą operatorową jest algebrą Banacha z jedynką (operator identycznościowy), ale nie jest przemienna.

4. Pewne własności analityczne i spektralne

Twierdzenie 4.1. *Niech f będzie elementem algebry Banacha A, a h funkcją zespoloną analityczną w otoczeniu $\sigma(f)$. Wtedy istnieje $g \in A$ takie, że $\hat{g} = h \circ \hat{f}$.*

Dowód. Ze wzoru Cauchy'ego otrzymujemy

$$h(z_0) = \frac{1}{2\Pi i}\int_\Gamma \frac{h(z)}{z - z_0}\,dz, \qquad z_0 \in \sigma(f)$$

dla dowolnego konturu Γ zawierającego $\sigma(f)$. Określamy

$$g := \frac{1}{2\Pi i}\int_\Gamma h(z)(z-f)^{-1}\,dz.$$

Powyższa całka istnieje jako całka Riemanna. Poprzez aproksymację skończonymi sumami Riemanna otrzymujemy

$$\hat{g}(\varphi) = \varphi(g) = \frac{1}{2\Pi i} \int_\Gamma h(z)(z - \varphi(f))^{-1}\, dz = h(\varphi(f)) = h(\hat{f}(\varphi)),$$

skąd $\hat{g} = h \circ \hat{f}$. □

Definicja 4.2. Promieniem spektralnym elementu $f \in A$ nazywamy wartość

$$r(f) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(f)\}.$$

Na mocy twierdzenia 2.9 promień spektralny jest równy $\|\hat{f}\|$.

Twierdzenie 4.3. $r(f) = \lim_{n\to\infty} \|f^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Dowód. Niech $\varphi \in \mathcal{M}_A$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $|\hat{f}(\varphi)| = |\hat{f}^n(\varphi)|^{\frac{1}{n}} \leqslant \|f^n\|^{\frac{1}{n}}$, skąd

$$r(f) = \|\hat{f}\| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|f^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Niech $L \in A^*$. Dla $\lambda \notin \sigma(f)$ określamy $h(\lambda) := L((\lambda - f)^{-1})$. Na mocy Twierdzenia 1.3, h jest funkcją analityczną poza widmem f oraz

$$h(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L(f^n)}{\lambda^{n+1}}$$

dla dostatecznie dużych $|\lambda|$. Ponieważ h jest analityczna dla $|\lambda| > \|\hat{f}\|$, więc szereg musi być zbieżny dla takich λ. Stąd

$$\sup_n \frac{|L(f^n)|}{|\lambda|^{n+1}} < \infty \qquad \text{dla } |\lambda| > \|\hat{f}\|.$$

Ustalmy λ takie, że $|\lambda| > \|\hat{f}\|$. Z dowolności L wynika, że powyższy kres górny jest skończony dla wszystkich $L \in A^*$. Z twierdzenia Banacha-Steinhausa (o jednostajnej ograniczoności) wnioskujemy, że

$$\sup_n \frac{\|f^n\|}{|\lambda|^n} = M < \infty.$$

Stąd

$$\limsup_{n\to\infty} \|f^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \limsup_{n\to\infty} M^{\frac{1}{n}} |\lambda|^{1+\frac{1}{n}} = |\lambda|.$$

Nierówność powyższa jest prawdziwa, gdy $|\lambda| > \|\hat{f}\|$, a zatem

$$\limsup_{n\to\infty} \|f^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \|\hat{f}\| = r(f),$$

co kończy dowód twierdzenia. □

Wniosek 4.4. *Transformata Gelfanda jest izometrią wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\|f^2\| = \|f\|^2.$$

Dowód. Gdy transformata Gelfanda jest izometrią, to $\|f^2\| = \|\hat{f}^2\| = \|\hat{f}\|^2 = \|f\|^2$. Implikacja przeciwna wynika z twierdzenia 4.3. □

Lemat 4.5. *Niech $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ będzie funkcją całkowitą taką, że $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ oraz*

$$0 < |f(\lambda)| \leqslant e^{\lambda} \qquad \text{dla } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Wtedy $f(\lambda) = 1$ dla wszystkich $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dowód. Ponieważ f nie ma zer, więc istnieje funkcja całkowita g taka, że $f = \exp(g)$, $g(0) = g'(0) = 0$ i $\mathrm{re}|g(\lambda)| \leqslant |\lambda|$. Wtedy dla $r \geqslant |\lambda|$ otrzymujemy

$$|g(\lambda)|^2 \leqslant 4r^2 - 4\mathrm{re}\; g(\lambda) + |g(\lambda)|^2 = |2r - g(\lambda)|^2,$$

skąd wnioskujemy, że funkcja

$$h_r(\lambda) = \frac{r^2 g(\lambda)}{\lambda^2 |2r - g(\lambda)|} \tag{4.1}$$

jest holomorficzna w zbiorze $\{\lambda : |\lambda| < 2r\}$. Ponadto $|h_r(\lambda)| \leqslant 1$ dla $|\lambda| = r$. Z zasady maksimum wynika więc, że

$$|h_r(\lambda)| \leqslant 1 \qquad \text{dla } |\lambda| \leqslant r. \tag{4.2}$$

Ustalmy λ i niech $r \to \infty$. Wówczas (4.1) i (4.2) implikują $g(\lambda) = 0$. □

Twierdzenie 4.6. *(Gelfand, Kahane, Żelazko) Jeżeli φ jest funkcjonałem liniowym na algebrze Banacha A (niekoniecznie przemiennej) takim, że $\varphi(1) = 1$ oraz $\varphi(f) \neq 0$ dla każdego elementu odwracalnego $f \in A$, to φ jest multyplikatywny.*

Uwaga: ciągłość φ nie jest zakładana.

Dowód. *(Nie obowiązuje do egzaminu).* Niech $f, g \in A$. Z faktu, że $\ker\varphi$ ma kowymiar równy 1 wynika, że

$$f = a + \varphi(f)1, \qquad g = b + \varphi(g)1$$

dla pewnych elementów $a, b \in \ker\varphi$. Zatem

$$\varphi(fg) = \varphi(ab) + \varphi(a)\varphi(g) + \varphi(f)\varphi(b) + \varphi(f)\varphi(g) = \varphi(ab) + \varphi(f)\varphi(g). \tag{4.3}$$

A więc φ jest multyplikatywny wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi implikacja:

$$a, b \in \ker\varphi \implies ab \in \ker\varphi. \tag{4.4}$$

Przypuśćmy, że powyższa implikacja zachodzi dla $a = b$ tzn.

$$a \in \ker\varphi \implies a^2 \in \ker\varphi. \tag{4.5}$$

Wtedy (4.3) dla $f = g$ implikuje

$$\varphi(f^2) = (\varphi(f))^2 \qquad \text{dla } f \in A. \tag{4.6}$$

Zastępując f przez $f + g$ w (4.6), dla $f, g \in A$ otrzymujemy równość $\varphi(fg + gf) = 2\varphi(f)\varphi(g)$, skąd wynika implikacja

$$f \in \ker\varphi, g \in A \implies fg + gf \in \ker\varphi. \tag{4.7}$$

Rozważmy tożsamość

$$(fg - gf)^2 + (fg + gf)^2 = 2(f(gfg) + (gfg)f). \tag{4.8}$$

Jeśli $f \in \ker\varphi$, to prawa strona (4.8) jest na mocy (4.7) elementem $\ker\varphi$ i jest nim również $(fg + gf)^2$ na mocy (4.7) i (4.6). Zatem $(fg - gf)^2 \in \ker\varphi$ i kolejne zastosowanie (4.6) daje warunek $fg - gf \in \ker\varphi$ dla $f \in \ker\varphi$, $g \in A$, który połączony z (4.7) daje (4.4), co oznacza multyplikatywność φ. Wystarczy więc dowieść (4.5).

Z założenia, $\ker\varphi$ nie zawiera żadnych elementów odwracalnych algebry A. Zatem, na mocy wniosku 1.4, $\|1 - f\| \geqslant 1$ dla $f \in \ker\varphi$. Zatem

$$\|(\lambda - f)\| \geqslant |\lambda| = |\varphi(\lambda - f)| \qquad \text{dla } f \in \ker\varphi, \lambda \in \mathbb{C}. \tag{4.9}$$

Wnioskujemy stąd, że φ jest ciągłym funkcjonałem liniowym na A o normie 1.

Aby udowodnić (4.5), ustalmy $a \in \ker\varphi$, załóżmy bez straty ogólności $\|a\| = 1$ i zdefiniujmy

$$h(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(a^n)}{n!}\lambda^n \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{4.10}$$

Ponieważ $|\varphi(a^n)| \leqslant \|a^n\| \leqslant \|a\|^n = 1$, więc funkcja h jest całkowita i spełnia nierówność $|h(\lambda)| \leqslant \exp|\lambda|$ dla wszystkich $\lambda \in \mathbb{C}$. Ponadto $h(0) = \varphi(1) = 1$ i $h'(0) = \varphi(a) = 0$.

Jeśli udowodnimy, że $h(\lambda) \neq 0$ dla wszystkich $\lambda \in \mathbb{C}$, to z lematu 4.5 wynikać będzie $h''(0) = 0$. Zatem $\varphi(a^2) = 0$, co dowodzi (4.5).

Szereg

$$E(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}a^n \tag{4.11}$$

jest zbieżny w normie na A dla wszystkich $\lambda \in \mathbb{C}$. Z ciągłości φ mamy

$$h(\lambda) = \varphi(E(\lambda)) \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{4.12}$$

Równanie funkcyjne $E(\lambda + \mu) = E(\lambda)E(\mu)$ wynika z (4.11) dokładnie w taki sam sposób, jak w przypadku skalarnym. W szczególności

$$E(\lambda)E(-\lambda) = E(0) = 1 \qquad \text{dla } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Zatem $E(\lambda)$ jest elementem odwracalnym w A dla wszystkich $\lambda \in \mathbb{C}$. Na mocy założenia mamy więc $\varphi(E(\lambda)) \neq 0$ i wobec (4.12), również $h(\lambda) \neq 0$, co kończy dowód.

□

5. Brzeg Szyłowa

Definicja 5.1. Zbiór $E \subset \mathcal{M}_A$ nazywamy zbiorem maksymizującym, gdy

$$\sup_{\varphi \in E} |\hat{f}(\varphi)| = \|\hat{f}\|.$$

Brzeg Szyłowa jest to minimalny domknięty zbiór maksymizujący.

Twierdzenie 5.2. *Algebra Banacha (przemienna, z jedynką) ma jednoznacznie wyznaczony brzeg Szyłowa.*

Dowód. Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną domkniętych zbiorów maksymizujących. $\mathcal{F}$ jest niepusta, bo $\mathcal{M}_A \in \mathcal{F}$. Ponadto $\mathcal{F}$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym przez relację inkluzji. Jeżeli $\{E_\alpha\}$ jest łańcuchem w $\mathcal{F}$, to $\bigcap_\alpha E_\alpha$ jest jego kresem dolnym. Rzeczywiście, ponieważ każdy E_α jest domknięty, więc dla każdego $f \in A$ i dla każdego α mamy

$$E_\alpha \cap \{\varphi \in \mathcal{M}_A : |\hat{f}(\varphi)| = \|\hat{f}\|\} \neq \emptyset.$$

Ze zwartości $\mathcal{M}_A$ wnioskujemy, że

$$\bigcap_\alpha E_\alpha \cap \{\varphi \in \mathcal{M}_A : |\hat{f}(\varphi)| = \|\hat{f}\|\} \neq \emptyset,$$

co oznacza, że również $\bigcap_\alpha E_\alpha \in \mathcal{F}$. Zatem, na mocy lematu Kuratowskiego-Zorna, w $\mathcal{F}$ istnieje element minimalny Γ.

Wystarczy teraz wykazać jedyność Γ.

Dla dowodu nie wprost załóżmy, że istnieją dwa różne brzegi Szyłowa Γ_1, Γ_2. Niech $\varphi_0 \in \Gamma_1$, a V niech będzie dowolnym elementem z bazy otoczeń φ_0, tzn.

$$V = \{\varphi \in \mathcal{M}_A : |\hat{f}_i(\varphi)| < \varepsilon, \hat{f}_i(\varphi_0) = 0, i = 1, \dots, n\}.$$

Z minimalności Γ_1 wynika istnienie $g \in A$ takie, że

$$\max_{\Gamma_1 \setminus V} |\hat{g}(\varphi)| < \|\hat{g}\| = 1.$$

Zatem istnieje $m \in \mathbb{N}$ takie, że

$$|\hat{g}^m(\varphi)| < \frac{\varepsilon}{\max_{i=1,\dots,n} \|\hat{f}_i\|}$$

dla $\varphi \in \Gamma_1 \setminus V$, skąd dla każdego i otrzymujemy

$$\max_{\Gamma_1} |\hat{g}^m(\varphi)\hat{f}_i(\varphi)| = \|\hat{g}^m \hat{f}_i\| < \varepsilon. \tag{5.1}$$

Ponieważ Γ_2 jest brzegiem Szyłowa, więc istnieje $\varphi_1 \in \Gamma_2$ takie, że $|\hat{g}^m(\varphi_1)| = 1$. Z ostatniej nierówności w 5.1 dla każdego i mamy $|\hat{g}^m(\varphi_1)\hat{f}_i(\varphi_1)| < \varepsilon$, skąd $|\hat{f}_i(\varphi_1)| < \varepsilon$, a zatem $\varphi_1 \in V$. Wykazaliśmy więc, że każde otoczenie φ_0 ma niepuste przecięcie z Γ_2. Na mocy domkniętości Γ_2 oznacza to, że φ_0 należy do Γ_2. Zatem $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ i analogicznie $\Gamma_2 \subset \Gamma_1$. □

Wniosek 5.3. *Zbiór Γ jest brzegiem Szyłowa wtedy i tylko wtedy, gdy Γ jest przecięciem wszystkich domkniętych zbiorów maksymizujących.*

Przykład 5.4. Z określenia algebry $A = P(\partial\Delta)$ wynika, że jej brzeg Szyłowa Γ_A jest zawarty w $\partial\Delta$. Niech $|\lambda| = 1$, $f(z) = 1 + \bar{\lambda}z$. Mamy $f \in A$ oraz $\max_{z\in\Delta} |f(z)| = f(\lambda)$. Stąd $\Gamma_A = \partial\Delta$.

Przykład 5.5. Podobnie brzeg Szyłowa algebry $A = P(\partial\Delta \times \partial\Delta)$ jest zawarty w $\partial\Delta \times \partial\Delta$. Niech $|\lambda_1|, |\lambda_2| = 1$, $f(z_1, z_2) = (1 + \bar{\lambda}_1 z_1)(1 + \bar{\lambda}_2 z_2)$. Mamy $f \in A$ oraz $\max_{z\in\Delta\times\Delta} |f(z)| = f(\lambda_1, \lambda_2)$. Stąd $\Gamma_A = \partial\Delta \times \partial\Delta$.

Przez Γ_A będziemy oznaczać brzeg Szyłowa algebry A, a przez ∂E brzeg topologiczny zbioru E.

Twierdzenie 5.6. *Dla dowolnego elementu $f \in A$ mamy $\hat{f}(\Gamma_A) \supset \partial\hat{f}(\mathcal{M}_A)$.*

Dowód. Dla dowodu nie wprost załóżmy, że istnieje $\varphi \in \mathcal{M}_A$ takie, że $\hat{f}(\varphi) \in \partial\hat{f}(\mathcal{M}_A)$ oraz $\delta = \operatorname{dist}(\hat{f}(\varphi), \hat{f}(\Gamma_A)) > 0$, zatem istnieje $\lambda \in \mathbb{C}$ takie, że $|\lambda - \hat{f}(\varphi)| < \delta/2$ oraz $\lambda \notin \hat{f}(\mathcal{M}_A) = \sigma(f)$. A więc $\lambda - f$ jest elementem odwracalnym. Połóżmy $g := (\lambda - f)^{-1}$. Stąd $\hat{g} = \frac{1}{\lambda - \hat{f}}$. Wtedy dla $\psi \in \Gamma_A$ mamy

$$|\hat{g}(\psi)| = \frac{1}{|\lambda - \hat{f}(\psi)|} = \frac{1}{|\lambda - \hat{f}(\varphi) + \hat{f}(\varphi) - \hat{f}(\psi)|} \leqslant \frac{2}{\delta}.$$

Stąd $\|\hat{g}\| \leqslant \frac{2}{\delta}$, ale $\hat{g}(\varphi) > \frac{2}{\delta}$, co prowadzi do sprzeczności. □

6. Algebry funkcyjne

Definicja 6.1. Zbiorem *stanów* algebry A nazywamy zbiór

$$S(A) := \{\varphi \in A^* : \|\varphi\| = 1, \varphi(1) = 1\}.$$

Prostą obserwacją jest równość $S(A) = \{\varphi \in A^* : \|\varphi\| \leqslant 1, \varphi(1) = 1\}$. Z twierdzenia Kreina-Milmana wnioskujemy, że $S(A)$ jest równy domkniętej powłoce wypukłej swoich punktów ekstremalnych $\Omega(A)$.

Definicja 6.2. Algebrę Banacha A nazywamy algebrą funkcyjną, gdy A jest izometryczna z $\hat{A}$. Na mocy wniosku 4.4 zachodzi to wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $f \in A$ zachodzi równość $\|f^2\| = \|f\|^2$.

Definicja 6.3. Realizacją algebry funkcyjnej A nazywamy dowolną izometrycznie izomorficzną z A podalgebrę domkniętą $A_X \subset C(X)$ zawierającą stałe i rozdzielającą punkty X, gdzie X jest pewnym zbiorem zwartym.

A więc realizacją algebry A jest $\hat{A}$, jak również zawężenie $\hat{A}$ do dowolnego domkniętego zbioru maksymizującego E, m. in. do brzegu Szyłowa Γ.

Twierdzenie 6.4.

$$\Omega(A) \subset \mathcal{M}_A.$$

Dowód. Niech A_X będzie pewną realizacją algebry A i niech $\varphi \in \Omega(A)$. Zdefiniujmy

$$Z_\varphi := \{F \in S(C(X)) : F|_A = \varphi\}.$$

Z twierdzenia Hahna-Banacha wynika, że Z_φ jest niepusty. Ponadto jest on $*$-słabo zwarty (dlaczego? - ćwiczenie). Załóżmy, że F_0 jest punktem ekstremalnym Z_φ. Wykażemy, że jest również punktem ekstremalnym $S(C(X))$.

Niech $F_0 = \frac{1}{2}(F_1 + F_2)$, gdzie $F_1, F_2 \in S(C(X))$. Niech $\varphi_i := F_i|_A$ dla $i = 1, 2$. Wtedy

$$\varphi = F_0|_A = \frac{1}{2}(F_1|_A + F_2|_A) = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Ponieważ φ jest punktem ekstremalnym, więc $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$, skąd otrzymujemy $F_1, F_2 \in Z_\varphi$. Ponieważ F_0 jest punktem ekstremalnym w Z_φ, więc $F_0 = F_1 = F_2$, co oznacza, że F_0 jest punktem ekstremalnym w $S(C(X))$. Z twierdzenia Riesza o postaci funkcjonału wynika, że istnieje miara zespolona μ na zbiorze X (borelowska, regularna) taka, że

$$F_0(f) = \int_X f\, d\mu \qquad \text{dla } f \in C(X)$$

oraz $\|\mu\| = \|F_0\| = 1$. Ponieważ $\mu(X) = F_0(1) = 1$, więc $\mu \geqslant 0$. Jeżeli nośnik μ nie byłby zbiorem jednopunktowym, to F_0 nie byłby punktem ekstremalnym w $S(C(X))$. Zatem istnieje $x_0 \in X$ taki, że

$$F_0(f) = f(x_0), \tag{6.1}$$

skąd wynika, że F_0 jest funkcjonałem liniowo-multyplikatywnym. A więc $\varphi = F_0|_A$ jest również liniowo-multyplikatywny. □

Z 6.1 otrzymujemy ponadto

Wniosek 6.5. *Zbiór $\Omega(A) \subset X$ dla każdej realizacji $A_X \subset C(X)$.*

Definicja 6.6. Zbiór $\Omega(A)$ nazywamy *brzegiem Choqueta* algebry A.

Twierdzenie 6.7.

$$\overline{\Omega(A)} = \Gamma_A$$

Dowód. Z twierdzenia 6.4 mamy $\Omega(A) \subset \mathcal{M}_A \subset S(A)$. Zatem dla dowolnego $f \in A$

$$\sup_{x \in \overline{\Omega(A)}} |f(x)| \leqslant \sup_{x \in \mathcal{M}_A} |f(x)| = \|f\| \leqslant \sup_{\varphi \in S(A)} |\varphi(f)| \leqslant \sup_{\varphi \in \operatorname{conv}(\Omega(A))} |\varphi(f)| = \sup_{\varphi \in \Omega(A)} |\varphi(f)|,$$

gdzie $\operatorname{conv}(\Omega(A))$ oznacza otoczkę wypukłą zbioru $\Omega(A)$. Wykazaliśmy więc, że $\overline{\Omega(A)}$ jest domkniętym zbiorem maksymizującym zawartym w $\mathcal{M}_A$. Zawiera więc najmniejszy domknięty zbiór maksymizujący, czyli Γ_A. Z drugiej strony, na mocy wniosku 6.5, $\Omega(A) \subset X$ dla każdej realizacji A_X. A więc $\Omega(A) \subset \Gamma_A$, bo A_{Γ_A} też jest pewną realizacją A. □

Twierdzenie 6.8. *Jeżeli A_1, A_2 są algebrami funkcyjnymi, to A_1, A_2 są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy są izometryczne.*

Dowód. Załóżmy, że A_1, A_2 są izomorficzne. Ponieważ izomorfizm zachowuje widmo, więc zachowuje też normę spektralną, która w przypadku algebr funkcyjnych jest równa normie wyjściowej.

Implikacja w drugą stronę bez dowodu. □

7. Przemienne C^*-algebry

Definicja 7.1. W zespolonej algebrze (niekoniecznie przemiennej) inwolucją nazywamy odwzorowanie

$$A \ni f \to f^* \in A$$

spełniające dla $f, g \in A$ i $\lambda \in \mathbb{C}$ warunki:

(1) $f^{**} = f$
(2) $(f+g)^* = f^* + g^*$
(3) $(\lambda f)^* \bar{\lambda} f^*$
(4) $(fg)^* = g^* f^*$

Przykład 7.2. W algebrze $C(X)$, gdzie X jest pewnym zbiorem zwartym inwolucją jest odwzorowanie $C(X) \ni f \to \bar{f} \in C(X)$ ($\bar{f}$ oznacza funkcję $\bar{f}(x) := \overline{f(x)}$).

Definicja 7.3. Algebrę Banacha z inwolucją spełniającą dodatkowo warunek

$$\|f^* f\| = \|f\|^2$$

nazywamy C^*-algebrą.

Definicja 7.4. Niech A, B będą dwiema algebrami z inwolucją. Mówimy, że odwzorowanie $\Phi : A \to B$ jeżeli $\Phi(f^*) = \Phi(f)^*$ dla $f \in A$. Przez $*$-izometrię będziemy rozumieć izometrię zachowującą inwolucję.

Twierdzenie 7.5. *(Gelfand-Najmark) Dla dowolnej przemiennej C^*-algebry A transformacja Gelfanda jest $*$-izometrycznym izomorfizmem A na $C(\mathcal{M}_A)$.*

Uwaga: Zachowanie inwolucji oznacza w tym przypadku spełnianie równości $\widehat{f^*} = \overline{\hat{f}}$.

LEMAT 7.6.

$$1^* = 1.$$

DOWÓD. Korzystając z przemienności oraz punktów (1) i (4) definicji inwolucji otrzymujemy

$$1^* = 11^* = 1^{**}1^* = 1^*1^{**} = (1^*1)^* = 1^{**} = 1.$$

□

LEMAT 7.7.

$$\|f^2\| = \|f\|^2, \quad \|f\| = \|f^*\| \qquad \textit{dla } f \in A.$$

DOWÓD. Korzystając dwukrotnie z warunku w definicji C^*-algebry oraz punktu (4) definicji inwolucji, dla $f \in A$ otrzymujemy

$$\|f^2\|^2 = \|(f^2)^* f^2\| = \|(f^* f)^*(f^* f)\| = \|f^* f\|^2 = \|f\|^4,$$

skąd $\|f^2\| = \|f\|^2$. Podobnie

$$\|f\|^2 = \|f^* f\| = \|f^{**} f^*\| = \|f^*\|^2,$$

skąd $\|f\| = \|f^*\|$. □

WNIOSEK 7.8. *Przemienna C^*-algebra jest algebrą funkcyjną.*

LEMAT 7.9.

$$\sigma(f^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma(f)\}.$$

DOWÓD. Element $\lambda - f$ jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $g \in A$ takie, że $g(\lambda - f) = (\lambda - f)g = 1$, a to zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $(\bar{\lambda} - f^*)g^* = g^*(\bar{\lambda} - f^*) = 1$, tzn. gdy $\bar{\lambda} - f^*$ jest odwracalny. □

LEMAT 7.10.

(1) *Jeżeli $f \in A$ i $f^* = f^{-1}$, to $|\hat{f}| = 1$.*
(2) *Jeżeli $g \in A$ i $g^* = g$, to $\hat{g}$ jest rzeczywista.*

DOWÓD. (1) Z założenia $f^* = f^{-1}$ otrzymujemy $1 = \|f^* f\| = \|f\|^2$ oraz $(f^{-1})^* = f$, skąd $1 = \|(f^{-1})^* f^{-1}\| = \|f^{-1}\|^2$. Zatem widmo f i widmo f^{-1} zawiera się w domkniętym kole jednostkowym (wniosek 1.4). Ponadto na mocy twierdzenia 2.9 oraz lematu 7.9, $\sigma(f)^{-1} = \hat{f}(\mathcal{M}_A)^{-1} = \widehat{f^{-1}}(\mathcal{M}_A) = \sigma(f^{-1}) = \sigma(f^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma(f)\}$, co jest możliwe tylko wtedy, gdy widmo f jest zawarte w okręgu jednostkowym. A więc $|\hat{f}| = 1$.

(2) Dla $h \in A$ mamy $e^h = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!}$, przy czym szereg jest zbieżny w normie. Zatem $\widehat{e^h} = e^{\hat{h}}$, skąd wynika, że e^h jest odwracalny i $(e^h)^{-1} = e^{-h}$. Z lematu 7.7 wynika, że inwolucja jest ciągła, a zatem

$$(e^h)^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(h^n)^*}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(h^*)^n}{n!} = e^{h^*}$$

dla $h \in A$. Z założenia $g = g^*$. Zdefiniujmy $f := e^{ig}$. Wtedy $f^* = e^{-ig^*} = e^{-ig} = f^{-1}$. Z punktu (1) wynika, że widmo f zawiera się w okręgu jednostkowym, co oznacza, że widmo g jest rzeczywiste, a ponieważ $\hat{g}(\mathcal{M}_A) = \sigma(g)$, więc $\hat{g}$ jest funkcją rzeczywistą. □

Dowód. (twierdzenia Gelfanda-Najmarka) Na mocy wniosku 7.8, A jest algebrą funkcyjną, a zatem transformacja Gelfanda $A \to \hat{A} \subset C(\mathcal{M}_A)$ jest izometrią.

Niech $f \in A$. Zdefiniujmy $g := (f + f^*)/2$, $h := (f - f^*)/2i$. Wtedy $f = g + ih$, $g = g^*$, $h = h^*$, skąd $f^* = g^* - ih^*$. Na mocy lematu 7.10, elementy g i h są rzeczywiste, skąd

$$\widehat{f^*} = \widehat{g^*} - i\widehat{h^*} = \hat{g} - i\hat{h} = \overline{\hat{f}},$$

co oznacza zachowanie inwolucji przez transformację Gelfanda. Algebra $\hat{A}$ zawiera stałe, rozdziela punkty $\mathcal{M}_A$ i jest symetryczna, a więc na mocy twierdzenia Stone'a-Weierstrassa mamy $\hat{A} = C(\mathcal{M}_A)$. □

Niech S będzie przestrzenią topologiczną. Przez $CB(S)$ oznaczamy algebrę funkcji ciągłych i ograniczonych na S o wartościach zespolonych. Jest to przemienna C^*-algebra z normą supremową i inwolucją $f^* = \bar{f}$. Z twierdzenia Gelfanda-Najmarka wynika, że $CB(S)$ jest $*$-izometrycznie izomorficzna z algebrą $C(\mathcal{M}_{CB(S)})$. Dla $s \in S$ zdefiniujmy

$$\tau(s) := \bigcap_{f \in CB(S)} \hat{f}^{-1}(f(s)).$$

Każdy $\tau(s)$ jest funkcjonałem liniowo-multyplikatywnym na $CB(S)$. Odwzorowanie

$$S \ni s \to \tau(s) \in \mathcal{M}_{CB(S)}$$

jest bijekcją wtedy i tylko wtedy, gdy $CB(S)$ rozdziela punkty S. Ponadto $\tau(S)$ jest gęste w $\mathcal{M}_{CB(S)}$, bo $f = 0$ gdy $\hat{f} = 0$ na $\tau(S)$.

Stwierdzenie 7.11. *Odwzorowanie τ jest homeomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy S jest przestrzenią Tichonowa.*

Dowód. - Ćwiczenie. □

Z powyższego otrzymujemy następujące twierdzenie o kompaktyfikacji:

Twierdzenie 7.12. *(Čech-Stone) Jeżeli S jest przestrzenią Tichonowa, to istnieje przestrzeń zwarta X taka, że S jest homeomorficzna z gęstym podzbiorem X. Ponadto każda funkcja ciągła i ograniczona na S ma ciągłe rozszerzenie na całą X.*

8. Operatory normalne w przestrzeni Hilberta

Niech H będzie przestrzenią Hilberta. Oznaczmy przez $B(H)$ algebrę operatorów liniowych i ograniczonych z H w H ze składaniem operatorów jako działaniem mnożenia.

Ćwiczenie 8.1. Sprawdzić, że $B(H)$ spełnia wszystkie aksjomaty algebry Banacha.

Dla dowolnego operatora $T \in B(H)$ oraz $y \in H$ odwzorowanie

$$\varphi : H \ni y \to \langle x, Ty \rangle$$

jest ograniczonym funkcjonałem liniowym na H, gdyż $|\langle x, Ty \rangle| \leqslant \|x\|\|T\|\|y\|$. Z ostatniej nierówności wynika również zależność $\|\varphi\| \leqslant \|T\|\|x\|$. Z twierdzenia Riesza o postaci funkcjonału w przestrzeni Hilberta wnioskujemy, że istnieje jedyny wektor $T^*x \in H$ taki, że $\varphi(y) = \langle T^*x, y \rangle$ dla $y \in H$ oraz $\|T^*x\| = \|\varphi\| \leqslant \|T\|\|x\|$. Zatem $\langle T^*x, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ dla $x, y \in H$. Nietrudno sprawdzić, że odwzorowanie $T^* : H \ni x \to T^*x \in H$ jest liniowe, co wobec nierówności $\|T^*x\| \leqslant \|T\|\|x\|$, implikuje $T^* \in B(H)$ oraz $\|T^*\| \leqslant \|T\|$.

Ćwiczenie 8.2. Udowodnić, że $\|T^*\| = \|T\|$.

Ćwiczenie 8.3. Sprawdzić, że odwzorowanie $B(H) \ni T \to T^* \in B(H)$ spełnia aksjomaty involucji.

Definicja 8.4. Operator T^* nazywamy operatorem *sprzężonym* do T.

Lemat 8.5. *Jeżeli* $T \in B(H)$, *to* $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

Dowód.

$$\|T^*T\| \leqslant \|T^*\|\|T\| \leqslant \|T\|^2 = (\sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Tx\|)^2$$
$$= \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Tx\|^2 = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \langle Tx, Tx\rangle = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \langle T^*Tx, x\rangle \leqslant \|T^*T\|.$$

□

Definicja 8.6. Operator $N \in B(H)$ jest operatorem *normalnym*, gdy $NN^* = N^*N$.

Dla operatora normalnego $N \in B(H)$ domknięta algebra A generowana przez N, N^* i operator identycznościowy jest przemienną algebrą Banacha z jedynką i z inwolucją. Z lematu 8.5 wynika, że jest to C^*-algebra.

Na mocy twierdzenia 7.5 (Gelfanda-Najmarka), A jest $*$-izometrycznie izomorficzna z $C(\mathcal{M}_A)$. Każdy funkcjonał $\varphi \in \mathcal{M}_A$ jest całkowicie zdeterminowany przez wartość $\varphi(N)$. W konsekwencji $\mathcal{M}_A$ może być identyfikowane z widmem $\sigma_A(N)$ operatora N w algebrze A.

Lemat 8.7. $\sigma_A(N) = \sigma(N)$, *gdzie* $\sigma(N)$ *oznacza widmo* N *w algebrze* $B(H)$.

Dowód. Jeżeli $\lambda - N$ jest nieodwracalny w $B(H)$, to jest nieodwracalny w A. Zatem $\sigma_(N) \subset \sigma_A(N)$.

Załóżmy teraz, że $T := \lambda - N$ jest odwracalny w $B(H)$. Wtedy również T^*, a więc i T^*T jest odwracalny w $B(H)$. Ponieważ $T^{-1} = (T^*T)^{-1}T^*$, wystarczy dowieść, że $(T^*T)^{-1} \in A$.

Ponieważ $\widehat{T^*T} = |\tilde{T}|^2 \geqslant 0$, na $\mathcal{M}_A$, więc $(t - T^*T)^{-1} \in A$ dla $t < 0$, gdyż $(\widehat{t - T^*T}) = t - |\tilde{T}|^2 \leqslant t < 0$. Z faktu, że $(t - T^*T)^{-1}$ zmierza w normie $B(H)$ do $(-T^*T)^{-1}$ gdy $t \to 0-$, (dlaczego - ćwiczenie) otrzymujemy $(T^*T)^{-1} \in A$, co kończy dowód lematu. □

A zatem A jest $*$-izometrycznie izomorficzna z $C(\sigma(N))$. Dla funkcji $f \in C(\sigma(N))$ odpowiadający jej operator będzie oznaczany przez $f(N)$. Z rozważań przed lematem 8.7 wynika, że funkcją odpowiadającą operatorowi N jest funkcja $z \to z$.

Definicja 8.8. Funkcje Baire'a na zbiorze zwartym X są to funkcje wchodzące w skład najmniejszej klasy funkcji domkniętej ze względu na zbieżność i zawierającej wszystkie funkcje ciągłe.

Twierdzenie 8.9. *Izometryczny* $*$*-izomorfizm* $f \to f(N)$ *algebry* $C(\sigma(N))$ *na* A *rozszerza się do* $*$*-homomorfizmu algebry* $\mathcal{B}(\sigma(N))$ *wszystkich ograniczonych funkcji Baire'a na* $\sigma(N)$ *w algebrę* $B(H)$ *spełniający warunek* $\|g(N)\| \leqslant \|g\|$ *dla* $g \in \mathcal{B}(\sigma(N))$, *gdzie* $\|g\| = \{\sup |g(z)| : z \in \sigma(N)\}$.

Rozszerzenie to jest jednoznaczne. Ponadto, gdy $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczonym ciągiem w $\mathcal{B}(\sigma(N))$, zbieżnym punktowo do g, to

$$\lim_{n\to\infty}\langle g_n(N)x,y\rangle = \langle g(N)x,y\rangle, \qquad x,y\in H. \tag{8.1}$$

Dowód. *(Do egzaminu obowiązuje szkic dowodu).* Jednoznaczność rozszerzenia wynika ze wzoru (8.1).

Dla $f\in C(\sigma(N))$ i $x,y\in H$ określamy

$$L(f,x,y) := \langle f(N)x,y\rangle.$$

Funkcjonał L jest liniowy względem f oraz x i antyliniowy względem y. Ponadto

$$|L(f,x,y)| \leqslant \|f\|\|x\|\|y\|.$$

Z twierdzenie Riesza o postaci funkcjonału wynika, że dla ustalonych $x,y\in H$ istnieje miara zespolona μ_{xy} na $\sigma(N)$ taka, że

$$L(f,x,y) = \int f\,d\mu_{xy}, \qquad f\in C(\sigma(N)),$$

oraz $\|\mu_{xy}\|\leqslant\|x\|\|y\|$. Powyższy wzór pozwala nam rozszerzyć L do $\mathcal{B}(\sigma(N))$ w następujący sposób

$$L(g,x,y) := \int g\,d\mu_{xy}, \qquad f\in\mathcal{B}(\sigma(N)). \tag{8.2}$$

Zachodzi przy tym oszacowanie

$$|L(g,x,y)|\leqslant\|g\|\|x\|\|y\| \qquad g\in\mathcal{B}(\sigma(N)), \quad x,y\in H.$$

Istnieje zatem operator $g(N)\in B(H)$ taki, że

$$L(g,x,y) = \langle g(N)x,y\rangle, \qquad x,y\in H. \tag{8.3}$$

Odwzorowanie $g\to g(N)$ jest liniowe, spełnia warunek

$$\|g(N)\|\leqslant\|g\|, \qquad \bar{g}(N) = g(N)^*$$

oraz równość (8.1). Dla $f,g\in C(\sigma(N))$ oraz $X,y\in H$ mamy

$$\langle (fg)(N)x,y\rangle = \langle f(N)g(N)x,y\rangle = \langle g(N)x, f(N)^*y\rangle. \tag{8.4}$$

Nierówność powyższą rozszerzamy na $g\in\mathcal{B}(\sigma(N))$ ustalając $f\in C(\sigma(N))$ i korzystając z przejścia granicznego w (8.1), a następnie w podobny sposób na $f\in\mathcal{B}(\sigma(N))$ ustalając $g\in\mathcal{B}(\sigma(N))$. Zatem

$$(fg)(N) = f(N)g(N) \tag{8.5}$$

dla $f,g\in\mathcal{B}(\sigma(N))$, co kończy dowód. □

Przez zbiór Baire'a rozumiemy tutaj każdy zbiór należący do najmniejszej σ-algebry generowanej przez zbiory, których funkcje charakterystyczne są funkcjami Baire'a. Zatem zbiorami Baire'a są między innymi podzbiory zwarte zbioru liczb zespolonych. Dla zbioru Baire'a E mamy $\chi_E(N) = \chi_E^2(N) = \chi_E(N)\chi_E(N)$ oraz $\chi_E(N)^* = \bar{\chi}_E(N)$. Oznacza to, że operator $P(E) := \chi_E(N)$ jest projekcją ortogonalną. Ponadto, na mocy (8.2) oraz (8.3) otrzymujemy

$$\langle P(E)x,y\rangle = \mu_{xy}(E). \tag{8.6}$$

Odwzorowanie $E \to P(E)$ spełniające (8.6), którego wartościami są projekcje ortogonalne nazywamy miarą spektralną. Zauważmy, że wobec (8.5), spełnia ono również równość $P(E \cap F) = P(E)P(F)$.

Niech g będzie funkcją ciągłą na $\sigma(N)$ (a więc jednostajnie ciągłą) i niech ω będzie jej modułem ciągłości, tzn. $|g(\lambda) - g(\lambda')| < \omega(\delta)$ dla $|\lambda - \lambda'| < \delta$. Niech $\{E_j\}_{j=1}^n$ będzie pokryciem $\sigma(N)$ zbiorami Baire'a o średnicach mniejszych od δ. Jeżeli $\lambda_j \in E_j$ są ustalone, to

$$\|g - \sum_{j=1}^n g(\lambda_j)\chi_{E_j}\| \leqslant \omega(\delta).$$

Stąd na mocy twierdzenia 8.9

$$\|g(N) - \sum_{j=1}^n g(\lambda_j)P(E_j)\| \leqslant \omega(\delta).$$

Zmierzając z deltą do zera otrzymujemy równość

$$g(N) = \int_{\sigma(N)} g\,dP \qquad g \in C(\sigma(N)),$$

którą w świetle (8.6) należy rozumieć w ten sposób, że dla dowolnych $x, y \in H$ mamy

$$\langle g(N)x, y\rangle = \int_{\sigma(N)} g\,d\langle P(\cdot)x, y\rangle = \int_{\sigma(N)} g\,d\mu_{xy} \qquad g \in C(\sigma(N)).$$

W szczególności dla $g(\lambda) = \lambda$ otrzymujemy następujące twierdzenie spektralne

TWIERDZENIE 8.10. *Jeżeli $N \in B(H)$ jest operatorem normalnym, to istnieje miara spektralna P na $\sigma(N)$ taka, że*

$$N = \int_{\sigma(N)} \lambda\,dP.$$

TWIERDZENIE 8.11. *(Gelfand-Najmark). Jeżeli A jest C^*-algebrą, to istnieje przestrzeń Hilberta H taka, że A jest $*$-izometrycznie izomorficzna z pewną $*$-podalgebrą $B(H)$.*

DOWÓD. Bez dowodu. $\square$

ROZDZIAŁ 3

Własności kratowe i algebraiczne $C(X)$ i przestrzeni do niej dualnej

1. Ideały algebraiczne i porządkowe w $C_{\mathbb{R}}(X)$ i w przestrzeni do niej dualnej

Przypomnijmy wniosek 2.9 z rozdziału 1:

Wniosek 1.1. *Jeżeli E, F są porządkowo zupełnymi kratami wektorowymi, to*

(1) $(S \vee T)x = \sup\{Sy + Tz :\ y, z \in E^+,\ y + z = x\}$,
(2) $(S \wedge T)x = \inf\{Sy + Tz :\ y, z \in E^+,\ y + z = x\}$

dla $S, T \in \mathcal{L}_r(E, F)$, $x \in E^+$.

Wynika z niego następujący

Lemat 1.2. *Jeżeli E jest kratą Banacha, $x^*, y^* \in (E^*)^+$, $x^* \wedge y^* = 0$, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją $x, y \in E^+$ takie, że $\|x\| \leqslant 1$, $\|y\| \leqslant 1$, $x \wedge y = 0$ oraz $\|x^*\| \leqslant x^*(x) + \varepsilon$, $\|y^*\| \leqslant y^*(y) + \varepsilon$.*

Dowód. Niech $\delta := \varepsilon/3$. Weźmy $u, v \in E^+$ o normie 1 takie, że $\|x\|^* \leqslant x^*(u) + \delta$, $\|y\|^* \leqslant y^*(v) + \delta$. Ponieważ $(x^* \wedge y^*)(u) = (x^* \wedge y^*)(v) = 0$, więc na mocy wniosku 1.1

$$\exists\ u_1, u_2 \in E^+ :\ u_1 + u_2 = u, \quad x^*(u_1) + y^*(u_2) < \delta$$
$$\exists\ v_1, v_2 \in E^+ :\ v_1 + v_2 = v, \quad x^*(v_1) + y^*(v_2) < \delta$$

Zdefiniujmy $x := u_2 - v_1 \wedge u_2$, $y := v_1 - v_1 \wedge u_2$. Wtedy $\|x\| \leqslant 1$ $\|y\| \leqslant 1$ oraz $x \wedge y = 0$. Zatem

$$\begin{aligned} x^*(x) &= x^*(u_2) - x^*(v_1 \wedge u_2) \geqslant x^*(u_2) - x^*(v_1) \geqslant x^*(u_2) - x^*(v_1) - x^*(v_2) \geqslant x^*(u_2) - \delta \\ &= x^*(u) - x^*(u_1) - \delta \geqslant (\|x^*\| - \delta) - x^*(u_1) - \delta \geqslant \|x^*\| - 3\delta \geqslant \|x^*\| - \varepsilon \end{aligned}$$

Analogicznie $y^*(y) \geqslant \|y^*\| - \varepsilon$. □

Wniosek 1.3. *Załóżmy, że w kracie Banacha E dla każdej pary rozłącznych elementów x, y zachodzi równość $\|x \vee y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$. Wtedy dla każdej pary rozłącznych elementów $x^*, y^* \in E^*$ zachodzi równość $\|x^* + y^*\| = \|x^*\| + \|y^*\|$.*
Również dla każdego ciągu $\{x_n^*\} \subset E^*$ parami rozłącznych elementów mamy

$$\|\sum_{i=1}^{\infty} x_n^*\| = \sum_{i=1}^{\infty} \|x_n^*\|.$$

Dowód. Niech $x^*, y^* \in E^*$ oraz $x^* \wedge y^* = 0$. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Wtedy, na mocy lematu 1.2, istnieją rozłączne elementy $x, y \in E^+$ o normie niewiększej od 1 takie, że

$\|x^*\| \leqslant x^*(x) + \varepsilon$, $\|y^*\| \leqslant y^*(y) + \varepsilon$. Stąd

$$\begin{aligned}\|x^* + y^*\| &\leqslant \|x^*\| + \|y^*\| \leqslant x^*(x+y) + y^*(x+y) + 2\varepsilon \leqslant (x^* + y^*)(x+y) + 2\varepsilon \\ &\leqslant \|x^* + y^*\|\|x+y\| + 2\varepsilon \leqslant \|x^* + y^*\|\|x \vee y\| + 2\varepsilon \leqslant \|x^* + y^*\| + 2\varepsilon.\end{aligned}$$

A zatem mamy równość $\|x^*+y^*\| = \|x^*\|+\|y^*\|$. Stosując otrzymaną równość wielokrotnie i przechodząc do granicy otrzymamy pozostałą część tezy. □

Niech X będzie zbiorem zwartym. Rozważmy algebrę $C_{\mathbb{R}}(X)$ funkcji ciągłych na X o wartościach rzeczywistych. Jest to algebra Banacha nad ciałem liczb rzeczywistych.

TWIERDZENIE 1.4. *Jeżeli J jest domkniętym ideałem algebry $A = C_{\mathbb{R}}(X)$ nad ciałem liczb rzeczywistych lub algebry $A = C(X)$ nad ciałem liczb zespolonych, to $J = J_E$, gdzie E jest pewnym domkniętym podzbiorem X, a $J_E = \{f \in A : f|_E \equiv 0\}$.*

DOWÓD. Przyjmijmy $E = \bigcap_{f\in J} f^{-1}(\{0\})$. Oczywiście $J \subset J_E$. Wykażemy inkluzję przeciwną.

Niech $f \in J_E$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $U := \{x \in X : |f(x)| < \varepsilon\}$. Ponieważ f jest ciągła, więc U jest otwarty, a zatem $K := X \setminus U$ jest domknięty w X, a więc również zwarty. Ponadto $U \supset f^{-1}(\{0\}) \supset E$. Wynika stąd, że dla każdego $y \in K$ istnieje funkcja $g_y \in J$ różna od zera w pewnym otoczeniu V_y punktu y. Rodzina $\{V_y\}_{y\in K}$ stanowi otwarte pokrycie zbioru K. Ze zwartości zbioru K wynika istnienie podpokrycia skończonego $\{V_{y_1}, \dots, V_{y_n}\}$. Zdefiniujmy funkcję $g \in J$ jak następuje:

$$g := g_{y_1}\bar{g}_{y_1} + \cdots + g_{y_n}\bar{g}_{y_n} = |g_{y_1}|^2 + \cdots + |g_{y_n}|^2.$$

Zauważmy, że dla każdego n naturalnego funkcja $1 + ng$ jest wszedzie silnie dodatnia, a zatem $1/(1 + ng) \in A$. Stąd $f_n := f\frac{ng}{1+ng} \in J$ dla każdego n, gdyż $g \in J$. Wykażemy, że $|f - f_n| < 2\varepsilon$ dla dostatecznie dużych n. Istotnie, gdy $x \in$U, to $|f(x) - f_n(x)| < 2\varepsilon$ dla dowolnego n, gdyż wtedy $|f(x)| < \varepsilon$ i $\frac{ng}{1+ng} < 1$. Dla $x \in K$ mamy $|f(x) - f_n(x)| < 2\varepsilon$ dla dostatecznie dużych n, gdyż $\frac{ng}{1+ng}$ zmierza jednostajnie do 1 na K. Zatem $f_n \to f$ jednostajnie na X. Ponieważ $f_n \in J$ dla każdego n i J jest domknięty, więc również $f \in J$. □

Algebra $C_{\mathbb{R}}(X)$ z naturalnym porządkiem

$$f, g \in C_{\mathbb{R}}(X), \quad f \leqslant g \iff f(x) \leqslant g(x) \quad \forall x \in X \tag{1.1}$$

jest kratą Banacha. Rozważmy jej przestrzeń porządkowo dualną $C_{\mathbb{R}}(X)\tilde{}$. Na mocy twierdzenia 5.9 z rozdziału 1 jest równa jej przestrzeni dualnej $C_{\mathbb{R}}(X)^*$, tzn. przestrzeni funkcjonałów liniowych ciągłych na $C_{\mathbb{R}}(X)$. Ponadto, na mocy twierdzenia 2.8 (rozdział 1) Riesza-Kantorowicza jest ona porządkowo zupełna.

DEFINICJA 1.5. Jeżeli W jest podzbiorem przestrzeni unormowanej F, to zbiór

$$W^\perp := \{\varphi \in F^* : \varphi(f) = 0 \ \forall f \in W\} \subset F^*$$

nazywamy anihilatorem W. Jeżeli U jest podzbiorem F^*, to zbiór

$${}^\perp U := \{f \in F : \varphi(f) = 0 \ \forall \varphi \in U\} \subset F$$

nazywamy preanihilatorem U.

Twierdzenie 1.6. *Jeżeli W jest podprzestrzenią liniową przestrzeni unormowanej F, a U podprzestrzenią liniową F^*, to ${}^\perp(W^\perp)$ jest równy domknięciu W, a $(U)^\perp$ $*$-słabemu domknięciu U.*

Dowód. Bez dowodu - twierdzenie to jest jednym z podstawowych twierdzeń analizy funkcjonalnej. $\square$

Twierdzenie 1.7. *Jeżeli J jest ideałem porządkowym w kracie Banacha F, to $J^\perp$ jest zamkniętym ideałem porządkowym w F^* domkniętym w $*$-słabej topologii. Jeżeli J jest ideałem porządkowym w F^*, to ${}^\perp J$ jest ideałem domkniętym w F.*

Dowód. *(Do egzaminu obowiązuje szkic dowodu).* Niech $\varphi \in J^\perp$, $\psi \in F^*$ oraz $|\psi| \leqslant |\varphi|$. Niech $f \in J$. Gdy $-|f| \leqslant g \leqslant |f|$, to również $g \in J$. Z równości (3) w twierdzeniu Riesza-Kantorowicza mamy więc $|\varphi|(|f|) = 0$, skąd $|\psi(f)| \leqslant |\psi|(|f|) = 0$, co oznacza, że $\psi \in J^\perp$. A więc $J^\perp$ jest ideałem porządkowym.

Niech $D \subset J^\perp$ będzie skierowanym zbiorem ograniczonym z góry przez ψ. Dla porządkowej domkniętości $J^\perp$ musimy wykazać, że $\sup D \in J^\perp$. Dla $f \in (F^*)^+$ definiujemy $r(f) := \sup\{\varphi(f) : f \in D\}$. Funkcjonał r jest addytywny bo D jest zbiorem skierowanym i homogeniczny względem dodatnich skalarów. Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 2.5 (rozdział 1) Kantorowicza definiujemy φ_0 kładąc $\varphi_0(f^+ - f^-) := r(f^+) - r(f^-)$ dla $f \in C_{\mathbb{R}}(X)$ i dowodzimy, że φ_0 jest liniowy. Homogeniczność względem dodatnich skalarów wynika z takiej samej homogeniczności r. Dla $\lambda > 0$ i $f \in F$ mamy $\varphi_0((-\lambda)f) = \varphi_0(\lambda(-f)) = \lambda\varphi_0(-f) = \lambda(-\varphi_0(f)) = (-\lambda)\varphi_0(f)$, skąd wynika homogeniczność φ_0 względem ujemnych skalarów. Zatem φ_0 jest liniowy oraz $\varphi_0(f) = r(f) = \sup\{\varphi(f) : f \in D\}$ dla dodatnich f.

Dla $f \in (F^*)^+$ i $g \in [0, f]$ mamy $\eta(g) \leqslant \sup_{\varphi \in D} \varphi(g) \leqslant \psi(g) \leqslant \psi(f)$ dla dowolnie wybranego elementu $\eta \in D$. A więc $\varphi_0([0, f])$ jest zbiorem ograniczonym dla dowolnego $f \in (F^*)^+$. Stąd wnioskujemy (ćwiczenie), że $\varphi_0([f, g])$ jest zbiorem ograniczonym dla dowolnych $f, g \in (F^*)$, co oznacza porządkową ograniczność funkcjonału φ_0. Z twierdzenia Riesza-Kantorowicza wynika, że φ_0 jest regularny czyli należy do $F^\sim = F^*$. Zatem $\varphi_0 = \sup D$. Ponieważ $\varphi_0(f) = \sup\{\varphi(f) : f \in D\}$ dla dodatnich f i $D \subset J^\perp$, więc również $\varphi_0 \in J^\perp$.

Ideał porządkowy $J^\perp$ jest zatem ideałem zamkniętym. Jest też $*$-słabo domknięty, bo każdy anihilator jest $*$-słabo domknięty, co wynika natychmiast z definicji.

Jeżeli J jest ideałem porządkowym w F^*, to na mocy poprzedniej części twierdzenia, $J^\perp$ jest ideałem w $(F^*)^*$. Kratę F możemy traktować jako podkratę $(F^*)^*$. A więc jeżeli $f \in {}^\perp J \subset J^\perp$ i $|g| \leqslant |f|$, to $g \in J^\perp \cap F = {}^\perp J$. Domkniętość ${}^\perp J$ wynika z domkniętości preanihilatora. $\square$

Twierdzenie 1.8. *Jeżeli J jest domkniętym ideałem w $C_{\mathbb{R}}(X)$, to jest również ideałem porządkowym, a $J^\perp$ jest zamkniętym ideałem porządkowym w $C_{\mathbb{R}}(X)^*$ domkniętym w $*$-słabej topologii.*

Dowód. Z twierdzenia 1.4 wynika $J = J_E$ dla pewnego domkniętego $E \subset X$. Zatem dla $f \in J$ mamy również $|f| \in J$. Gdy $g \in C_{\mathbb{R}}(X)$ i $|g| \leqslant |f|$ to ponieważ $|f|$ zeruje się na E, to g również, czyli $g \in J$. Ta implikacja oznacza, że J jest ideałem porządkowym. Z twierdzenia 1.7 wynika teza. $\square$

2. $M(X)$ jako dualna do algebry $C(X)$

Niech X będzie zbiorem zwartym, a $\mathcal{B}$ σ-algebrą zbiorów borelowskich na X.

DEFINICJA 2.1. Odwzorowanie $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ nazywamy *zespoloną miarą borelowską*, gdy

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \tag{2.1}$$

dla dowolnej rodziny przeliczalnej $\{E_n\} \subset \mathcal{B}$ złożonej ze zbiorów rozłącznych.

DEFINICJA 2.2. *Miarą rzeczywistą* nazywamy miarę zespoloną o wartościach rzeczywistych. *Miarą nieujemną* nazywamy odwzorowanie $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ spełniające warunek (2.1).

UWAGA 2.3. Każda skończona miara nieujemna jest szczególnym przypadkiem miary zespolonej i rzeczywistej.

DEFINICJA 2.4. Borelowska, nieujemną miarę μ jest *regularna*, gdy dla każdego $E \in \mathcal{B}$

$$\sup\{\mu(K) : K \subset E,\ K \text{ zwarty}\} = \mu(E) = \sup\{\mu(V) : V \supset E,\ V \text{ otwarty}\}.$$

LEMAT 2.5. *Każdy funkcjonał nieujemny φ na $C_{\mathbb{R}}(X)$ jest ograniczony, czyli ciągły. Również każdy funkcjonał nieujemny φ na kracie unormowanej funkcji borelowskich na X jest ograniczony, czyli ciągły.*

DOWÓD. W obu przypadkach kula jednostkowa jest równa przedziałowi porządkowemu $[-1, 1]$, gdzie przez 1 rozumiemy funkcję identycznie równą jeden. Stąd dla każdego elementu f z kuli jednostkowej mamy $|f| \leqslant 1$, skąd $|\varphi(f)| \leqslant \varphi(|f|) \leqslant \varphi(1)$. $\square$

TWIERDZENIE 2.6. *(Riesz) Jeżeli $\varphi : C_{\mathbb{R}}(X) \to \mathbb{R}$ jest funkcjonałem liniowym nieujemnym, to istnieje jedyna regularna, skończona, borelowska miara nieujemna μ na X taka, że*

$$\varphi(f) = \int_X f\, d\mu \qquad \textit{dla } f \in C_{\mathbb{R}}(X), \tag{2.2}$$

oraz $\|\varphi\| = \mu(x)$.

DOWÓD. *(Do egzaminu obowiązuje szkic dowodu).* Niech E będzie dowolnym podzbiorem domkniętym X (a więc także zwartym). Wtedy J_E jest ideałem domkniętym algebry $C_{\mathbb{R}}(X)$, a więc na mocy twierdzenia 1.8, $J_E^{\perp}$ jest zamkniętym ideałem porządkowym. Zgodnie a twierdzeniem 4.17 rozdziału 1 jest on ideałem projekcyjnym. Zatem $\varphi = \varphi_E + \varphi_d$, gdzie $\varphi_E \in J_E^{\perp}$, $\varphi_d \in (J_E^{\perp})^d$ i oba funkcjonały φ_E, φ_d są dodatnie.

Na mocy twierdzenia 1.7, ${}^{\perp}((J_E^{\perp})^d)$ jest ideałem porządkowym i algebraicznym domkniętym w $C_{\mathbb{R}}(X)$, a więc jest równy J_K dla pewnego zbioru zwartego $K \subset X$. Z równości $J_E^{\perp} \oplus (J_E^{\perp})^d = (C_{\mathbb{R}}(X))^*$ (twierdzenie 4.17 rozdziału 1) wynika, że $J_E = {}^{\perp}(J_E^{\perp})$ i $J_K = {}^{\perp}((J_E^{\perp})^d)$ są rozłączne, a zatem $E \cup K = X$. Ponieważ $(J_E^{\perp})^d$ jest najmniejszym ideałem porządkowym dopełniającym $J_E^{\perp}$, więc K musi być najmniejszym zbiorem o tej własności, czyli $K = \overline{X \setminus E}$. Stąd otrzymujemy

WNIOSEK 2.7. *Dla podzbiorów zwartych $K_1, K_2 \subset X$ takich, że $X = K_1 \cup K_2$ zachodzi inkluzja $(J_{K_1}^{\perp})^d \subset J_{K_2}^{\perp}$.*

LEMAT 2.8. *Jeżeli E, F są domkniętymi podzbiorami X, to $J_{E\cup F}^{\perp} = J_E^{\perp} + J_F^{\perp}$.*

DOWÓD. Oczywista jest równość $J_{E\cup F} = J_E \cap J_F$. Ponieważ $J_E \cap J_F \subset J_E$, więc $J_E^{\perp} \subset (J_E \cap J_F)^{\perp}$ i $J_F^{\perp} \subset (J_E \cap J_F)^{\perp}$, skąd $J_E^{\perp} + J_F^{\perp} \subset (J_E \cap J_F)^{\perp}$. Stosując wniosek 2.7 do zbioru $E \cup F$ zamiast zbioru X i traktując $(J_E^{\perp})^d$ jako dopełnienie rozłączne $J_E^{\perp}$ w $J_{E\cup F}^{\perp}$, otrzymujemy $J_{E\cup F}^{\perp} = J_E^{\perp} + (J_E^{\perp})^d \subset J_E^{\perp} + J_F^{\perp}$. □

Dla każdego K domkniętego (czyli zwartego) w X połóżmy $\mu(K) := \|\varphi_{J_K^{\perp}}\|$. Definicja jest poprawna, ponieważ na mocy lematu 2.5, każdy funkcjonał dodatni na $C_{\mathbb{R}}(X)$ jest ograniczony. Stosując lemat 2.8 do dowolnych zbiorów zwartych $K_1, K_2 \subset X$ mamy

$$\varphi_{J_{K_1\cup K_2}^{\perp}} \leqslant \varphi_{J_{K_1}^{\perp}} \vee \varphi_{J_{K_1}^{\perp}} \leqslant \varphi_{J_{K_1}^{\perp}} + \varphi_{J_{K_1}^{\perp}}$$

skąd

$$\mu(K_1 \cup K_2) = \|\varphi_{J_{K_1\cup K_2}^{\perp}}\| \leqslant \|\varphi_{J_{K_1}^{\perp}}\| + \|\varphi_{J_{K_2}^{\perp}}\| = \mu(K_1) + \mu(K_2) \tag{2.3}$$

Jeżeli $\{K_n\}$ jest ciągiem parami rozłącznych zbiorów zwartych w X, to stosując wniosek 1.3 otrzymujemy

$$\mu(K_1 \cup K_2 \cup \dots) = \mu(K_1) + \mu(K_n) + \dots. \tag{2.4}$$

Dla dowolnego $E \in \mathcal{B}$ zdefiniujmy

$$\mu(E) := \sup\{\mu(K) : K \subset E,\ K \text{ zwarty}\}. \tag{2.5}$$

Niech $\{E_n\} \subset \mathcal{B}$ będzie przeliczalną rodziną parami rozłącznych zbiorów. Weźmy dowolny $\varepsilon > 0$. Dla każdego n możemy znaleźć zbiór zwarty $K_n \subset E_n$ taki, że $\mu(K_n) > \mu(E_n) - 2^{-n}\varepsilon$. Wtedy, korzystając z (2.4), dla dostatecznie dużych m mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(K_n) + 2\varepsilon \leqslant \sum_{n=1}^{m} \mu(K_n) + 3\varepsilon \leqslant \mu(\bigcup_{n=1}^{m} K_n) + 3\varepsilon \leqslant \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) + 3\varepsilon.$$

Z dowolności ε wynika zatem nierówność

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \leqslant \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n). \tag{2.6}$$

Niech $\{V_1, V_2, \dots\}$ będzie rodziną parami rozłącznych zbiorów otwartych w X. Ponieważ $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(V_n) \leqslant \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n)$ na mocy (2.6), więc szereg po lewej stronie nierówności jest zbieżny. Jest to szereg wyrazów nieujemnych, zatem dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $\sum_{n=n_0}^{\infty} \mu(V_n) < \varepsilon$.

Weźmy dowolny $\varepsilon > 0$ i dowolny zbiór zwarty K zawarty w $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ taki, że

$$\mu(K) > \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n) - \varepsilon.$$

Ponieważ $V_i \cap \bigcup_{n\neq i}^{\infty} V_n = \emptyset$, więc $V_i \cap K = K \setminus \bigcup_{n\neq i}^{\infty} V_n$. Zatem $V_i \cap K$ jest dla każdego i zbiorem zwartym. Stąd na mocy (2.4) otrzymujemy

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n) < \mu(K) + \varepsilon \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(V_n \cap K) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(V_n).$$

Wobec (2.6) mamy więc

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(V_n) \tag{2.7}$$

dla dowolnej rodziny $\{V_1, V_2, \dots\}$ parami rozłącznych zbiorów otwartych w X.

Niech teraz $V_1, V_2 \subset X$ będą zbiorami otwartymi a $K \subset V_1 \cup V_2$ zbiorem zwartym. Wtedy $K \setminus V_2$ jest podzbiorem zwartym V_1. Dla każdego $x \in K \setminus V_2$ wybieramy otoczenie otwarte V_x takie, że $\overline{V}_x \subset V_1$. Korzystając ze zwartości zbioru $K \setminus V_2$ możemy znaleźć skończony zbiór $\{x_1, \dots x_n\}$ taki, że $K \setminus V_2 \subset \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$. Wtedy

$$K \setminus V_2 \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V}_{x_i} \subset V_1,$$

zbiór zwarty $K \setminus \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$ jest zawarty w V_2 oraz $(\bigcup_{i=1}^n \overline{V}_{x_i}) \cup (K \setminus \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}) \supset K$. Zatem na mocy (2.3), $\mu(K) \leqslant \mu(\bigcup_{i=1}^n \overline{V}_{x_i}) + \mu(K \setminus \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}) \leqslant \mu(V_1) + \mu(V_2)$. Ponieważ K był dowolnym podzbiorem zwartym $V_1 \cup V_2$, więc wobec (2.5), mamy

$$\mu(V_1 \cup V_n) \leqslant \mu(V_1) + \mu(V_2) \tag{2.8}$$

dla dowolnych otwartych podzbiorów X.

Niech $\mathcal{S}$ będzie rodziną podzbiorów $E \subset X$ spełniającą warunek (2.5) oraz

$$\inf\{\mu(V \setminus E) : V \supset E,\ V \text{ otwarty}\} = 0. \tag{2.9}$$

Weźmy dowolne zbiory $E_1, E_2 \in \mathcal{S}$. Wtedy istnieją zbiory zwarte $K_1, K_2 \subset X$ oraz otwarte $V_1, V_2 \subset X$ takie, że $K_i \subset E_i \subset V_i$, $\mu(V_i) < \mu(E_i) + \varepsilon$, $\mu(E_i) < \mu(K_i) + \varepsilon$ dla $i = 1, 2$. Stosując (2.6), mamy $\mu(V_i) = \mu((V_i \setminus K_i) \cup E_i) \geqslant \mu(V_i \setminus K_i) + \mu(K_i)$, skąd

$$\mu(V_i \setminus K_i) \leqslant \mu(V_i) - \mu(K_i) \leqslant \mu(V_i) - \mu(E_i) + \mu(E_i) - \mu(K_i) < 2\varepsilon.$$

Ponadto

$$(V_1 \setminus K_2) \setminus (K_1 \setminus V_2) = V_1 \cap (X \setminus K_2) \cap (X \setminus (K_1 \cap (X \setminus V_2)) =$$
$$V_1 \cap (X \setminus K_2) \cap ((X \setminus K_1) \cup V_2) = (V_1 \cap (X \setminus K_2) \cap (X \setminus K_1)) \cup (V_1 \cap (X \setminus K_2) \cap V_2) =$$
$$(V_1 \setminus (K_1 \cup K_2)) \cup ((V_1 \cap V_2) \setminus K_2) \subset (V_1 \setminus K_1) \cup (V_2 \setminus K_2)$$

skąd na mocy (2.8)

$$\mu((V_1 \setminus K_2) \setminus (K_1 \setminus V_2)) \leqslant \mu((V_1 \setminus K_1) \cup (V_2 \setminus K_2)) = \mu(V_1 \setminus K_1) + \mu(V_2 \setminus K_2) < 4\varepsilon.$$

Mamy zatem $V_1 \setminus K_2 \supset E_1 \setminus E_2 \supset K_1 \setminus V_2$ oraz

$$\mu((V_1 \setminus K_2) \setminus (E_1 \setminus E_2)) \leqslant \mu((V_1 \setminus K_2) \setminus (K_1 \setminus V_2)) < 4\varepsilon$$

co oznacza, że $E_1 \setminus E_2 \in \mathcal{S}$.

Jako ćwiczenie pozostawiamy sprawdzenie domkniętości rodziny $\mathcal{S}$ względem przeliczalnych sum i iloczynów zbiorów. Wynika stąd, że $\mathcal{S}$ jest σ-algebrą zawierającą zbiory borelowskie. Z (2.6), (2.8) i (2.9) wynika przeliczalna addytywność μ, a więc μ jest miarą na $\mathcal{B}$. Z warunków (2.5) i (2.9) wynika jej regularność.

Przestrzeń B ograniczonych funkcji borelowskich określonych na X o wartościach rzeczywistych z relacją częściowego porządku określoną jak w (1.1) i normą supremum jest kratą unormowaną zawierającą $C_{\mathbb{R}}(X)$. Ponadto $C_{\mathbb{R}}(X)$ jest dla niej majoryzująca. Zatem na mocy twierdzenia Kantorowicza 8.4 z rozdziału 1, funkcjonał φ posiada rozszerzenie do funkcjonału dodatniego $\Phi : B \to \mathbb{R}$.

Z regularności miary wynika równość $\Phi(\chi_E) = \mu(E)$ dla każdego zbioru borelowskiego E. Stąd

$$\Phi(s) = \int s \, d\mu$$

dla każdej borelowskiej funkcji prostej na X. Dla każdej funkcji $f \in C_{\mathbb{R}}(X)$ istnieje rosnący ciąg borelowskich funkcji prostych s_n zbieżny do f jednostajnie. Na mocy lematu 2.5, $\Phi(s_n) \to \varphi(f)$. Zbieżność $\int s_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$ wynika z twierdzenia Lebesgue'a. Stąd

$$\varphi(f) = \int f \, d\mu$$

dla $f \in C_{\mathbb{R}}(X)$. W szczególności $\|\varphi\| = \varphi(1) = \mu(X)$. $\square$

Każdy funkcjonał $\varphi \in C_{\mathbb{R}}(X)^*$ można rozłożyć na rozłączną różnicę $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ funkcjonałów dodatnich. Jeżeli μ^+ jest miarą odpowiadającą φ^+, a μ^- jest miarą odpowiadającą φ^- w twierdzeniu Riesza, to dla $\mu := \mu^+ - \mu^-$ mamy

$$\varphi(f) = \int f \, d\mu \qquad \text{dla } f \in C_{\mathbb{R}}(X)$$

.

Przestrzeń $C(X)$ jest kompleksyfikacją kraty $C_{\mathbb{R}}(X)$. Zatem, na mocy wniosków 7.16 i 7.17 z rozdziału 1, każdy funkcjonał $\varphi \in C(X)^*$ można przedstawić w postaci

$$\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2,$$

gdzie $\varphi_1, \varphi_2 \in C_{\mathbb{R}}(X)^*$. Ponadto $\|\varphi\| = \||\varphi|\|$. Jeżeli μ_j jest miarą reprezentującą funkcjonał φ_j dla $j = 1, 2$, to

$$\varphi(f) = \int f \, d\mu, \qquad |\varphi|(f) = \int f \, d|\mu|, \tag{2.10}$$

dla $f \in C(X)$, gdzie $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, a $|\mu|$ jest miarą nieujemną reprezentującą funkcjonał $|\varphi|$. Zatem $\|\varphi\| = |\mu|(X)$. Z drugiej strony, jeżeli μ jest zespoloną miarą borelowską na X, to definiując φ jak w pierwszej równości wzoru (2.10), otrzymujemy funkcjonał liniowy, ciągły na $C(X)$. Oznaczając przez $M(X)$ przestrzeń Banacha wszystkich borelowskich, regularnych miar zespolonych na X otrzymujemy:

Twierdzenie 2.9.

$$C(X)^* = M(X)$$

Ćwiczenie 2.10. Wykazać, że dla dowolnego zbioru borelowskiego $E \subset X$ mamy

$$|\mu|(E) = \sup\{\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(E_n)| : E_n \text{ borelowski } \forall n, E_i \cap E_j = \emptyset \text{ dla } i \neq j, \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E\}.$$

Definicja 2.11. Mówimy, że miara μ jest skoncentrowana na zbiorze borelowskim $E \subset X$, jeżeli $\mu(F) = \mu(F \cap E)$ dla każdego borelowskiego $F \subset X$.

Stwierdzenie 2.12. *Dla dowolnej miary μ istnieje jednoznacznie wyznaczony najmniejszy zbiór domknięty, na którym ta miara jest skoncentrowana. Nazywamy go domkniętym nośnikiem miary i oznaczamy przez supp(μ).*

Dowód. Wystarczy przeprowadzić dowód dla miar rzeczywistych. Niech B_μ będzie zamkniętym porządkowym ideałem głównym generowanym przez miarę μ. Na mocy twierdzenia 1.7, jego preanihilator jest domkniętym ideałem algebraicznym w $C_\mathbb{R}(X)$, a więc zgodnie z twierdzeniem 1.4, jest postaci J_E dla pewnego domkniętego $E \subset X$. Mamy zatem równość $\int f\,d\mu = 0$ dla wszystkich dodatnich funkcji $f \in C_\mathbb{R}(X)$ znikających na E. Miara μ jest więc skoncentrowana na zbiorze E. Gdyby była skoncentowana na jakimś zbiorze domkniętym $F \subsetneq E$, to preanihilator B_μ byłby istotnie większy od J_E, bo musiałby zawierać J_F. $\square$

Dla dowolnej miary rzeczywistej μ odwzorowanie $\varphi : C_\mathbb{R}(X) \ni f \to \int_X f\,d\mu$ jest rzeczywistym ciągłym funkcjonałem liniowym. Jak opisano wyżej, jego rozkład na rozłączną różnicę $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ powoduje rozkład miary $\mu = \mu^+ - \mu^-$, gdzie miara μ^+ reprezentuje funkcjonał φ^+, a miara μ^- funkcjonał φ^-. Z rozłączności funkcjonałów φ^+ i φ^- wynika rozłączność miar μ^+ i μ^-. Oznacza to, że istnieją rozłączne zbiory borelowskie $E_+, E_- \subset X$ takie, że μ^+ jest skoncentrowana na E_+, a że μ^- na E_- (ćwiczenie). Jest to tak zwany *rozkład Hahna* miary rzeczywistej.

3. Rozkład Lebesgue'a i twierdzenie Radona-Nikodyma

Definicja 3.1. Dwie miary zespolone η_1, η_2 są *wzajemnie osobliwe*, jeżeli istnieją dwa rozłącze zbiory borelowskie E_1, E_2 takie, że η_i jest skoncentrowana na E_i $(i = 1, 2)$.

Jeżeli μ jest miarą nieujemną a ν miarą zespoloną, to mówimy, że ν jest *absolutnie ciągła* względem μ (zapisujemy to $\nu \ll \mu$), gdy dla każdego zbioru borelowskiego E zachodzi implikacja

$$(\mu(E) = 0) \implies (\nu(E) = 0).$$

Nietrudno stwierdzić, że dwie miary są wzajemnie osobliwe wtedy i tylko wtedy, gdy są rozłączne w sensie porządkowym oraz że gdy $|\nu| \leqslant \mu$, to $\nu \ll \mu$. Co więcej, gdy ν należy do zamkniętego ideału głównego B_μ generowanego przez μ, to ν jest absolutnie ciągła względem μ. Istotnie, ponieważ $M(X)$ jest porządkowo zupełana jako dualna do $C(X)$, ideał B_μ jest projekcyjny, więc na mocy twierdzenia 4.18 i wniosku 4.19 rozdziału 1, $|\nu| = \sup_n(|\nu| \wedge n\mu)$.

Okazuje się, że zachodzi też pewna odwrotna zależność, tzn. gdy $\nu \ll \mu$, to ν należy do ideału głównego generowanego przez μ.

Twierdzenie 3.2. *(Rozkład Lebesgue'a i tw. Radona-Nikodyma) Jeżeli μ i ν są miarami borelowskimi na zbiorze zwartym X, przy czym μ jest nieujemna skończona, a ν zespolona, to*

$$\nu = \nu_a + \nu_s,$$

gdzie $\nu_a \ll \mu$, $\nu_a \in B_\mu$, $|\nu_a| = \sup_n(|\nu| \wedge n\mu)$ a ν_s jest osobliwa względem μ oraz istnieje funkcja $h \in L^1(\mu)$ taka, że dla każdego zbioru borelowskiego zachodzi równość

$$\nu_a(E) = \int_E h\,d\mu. \tag{3.1}$$

Dowód. Rozkładamy miarę ν względem ideału B_μ i definiujemy ν_a jako część ν należącą do tego ideału, a ν_s jako część rozłączną z tym ideałem. Ponieważ B_μ jest ideałem projekcyjnym, rozkład ten jest dobrze określony i jednoznaczny. Z rozważań przed wypowiedzią twierdzenia wynika, że ν_a jest absolutnie ciągła względem μ, a ν_s rozłączna z μ, czyli osobliwa wzlędem niej. Ponadto mamy równość $|\nu_a| = \sup_n(|\nu| \wedge n\mu)$, skąd również dla każdego k naturalnego otrzymujemy

$$|\nu_a| = \sup_n(|\nu| \wedge \frac{n}{k}\mu) \tag{3.2}$$

Oznaczając jak w stwierdzeniu 2.12 przez $\operatorname{supp}(\eta)$ domknięty nośnik dowolnej miary η definiujemy

$$g := \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{n=0}^{\infty} g_{k,n} \qquad \text{gdzie} \quad g_{k,0} = \chi_{\operatorname{supp}(|\nu_a|)},\ g_{k,n} = \chi_{\operatorname{supp}(|\nu_a|-|\nu|\wedge\frac{n}{k}\mu)}. \tag{3.3}$$

Z (3.2), (3.3) dla dowolnego zbioru borelowskiego $E \subset X$ mamy

$$|\nu_a|(E) = \int g\, d\mu. \tag{3.4}$$

(*Dowód wzoru* (3.4) *nie obowiązuje do egzaminu.*) Rozkładając miarę ν na część rzeczywistą i urojoną, a następnie każdą z nich na część dodatnią i ujemną i stosując do wszystkich tych części procedurę opisaną wzorami (3.2), (3.3) i (3.4), otrzymujemy (3.1). □

Wniosek 3.3. *Dla dowolnej borelowskiej, nieujemnej miary μ skończonej na X mamy równość $(L^1(\mu))^* = L^\infty(\mu)$ rozumianą w sensie izometrycznego izomorfizmu tzn, że dla każdego $\varphi \in (L^1(\mu))^*$ istnieje $h \in L^\infty(\mu)$ taka, że*

$$\varphi(f) = \int fh\, d\mu \qquad \textit{dla } f \in L^1(\mu)$$

oraz $\|\varphi\| = \|h\|_\infty$.

Dowód. Niech $\varphi \in (L^1(\mu))^*$. Na σ-algebrze borelowskich podzbiorów X definiujemy miarę ν w następujący sposób:

$$\nu(E) := \varphi(\chi_E).$$

Przeliczalna addytywność ν wynika z faktu, że $\chi_{E\cup F} = \chi_E + \chi_F$ dla dowolnych rozłącznych zbiorów $E, F \subset X$. A więc ν jest zespoloną miarą borelowską na X. Gdy $\mu(E) = 0$, to χ_E jest funkcją zerową w $L^1(\mu)$, a zatem $\nu(E) = \varphi(\chi_E) = 0$. Miara ν jest więc absolutnie ciągła względem μ. Z twierdzenia 3.2 wynika, że istnieje funkcja $h \in L^1(\mu)$ taka, że $\nu(E) = \int_E h\, d\mu$ dla dowolnego podzbioru borelowskiego $E \subset X$. Mamy zatem

$$\varphi(f) = \int f\, d\nu = \int fh\, d\mu \tag{3.5}$$

dla dowolnej borelowskiej funkcji prostej, a następnie dla dowolnej funkcji z $L^\infty(\mu)$ poprzez aproksymację jednostajną funkcjami prostymi. Oznaczmy $F := \{x \in X : |h(x)| > \|\varphi\|\}$. Wtedy

$$\varphi\left(\frac{|h|}{h}\chi_F\right) = \int_F |h|\, d\mu > \|\varphi\|\mu(F) = \|\varphi\| \left\|\frac{|h|}{h}\chi_F\right\|_1,$$

co prowadzi do sprzeczności. Zatem $\mu(F) = 0$, czyli $|h| \leqslant \|\varphi\|$ prawie wszędzie względem miary μ, co jest równoważne nierówności $\|h\|_\infty \leqslant \|\varphi\|$.

Dla każdej funkcji $f \in L^1(\mu)$ i $f_n = f \wedge (n \cdot 1)$ mamy $f_n \in L^\infty(\mu)$, $f_n \uparrow f$ oraz $\|f_n - f\|_1 \to 0$ (ćwiczenie). Stąd

$$\varphi(f) = \lim_{n\to\infty} \varphi(f_n) = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int f_n h \, d\mu = \int f h \, d\mu$$

Z drugiej strony dla $f \in L^1(\mu)$

$$|\varphi(f)| = \left| \int f h \, d\mu \right| \leqslant \int |fh| \, d\mu \leqslant \|h\|_\infty \int |f| \, d\mu = \|h\|_\infty \|f\|_1.$$

A więc $\|\varphi\| = \|h\|_1$. □

4. Własności kratowe $C(X)$ a własności topologiczne zbioru X

TWIERDZENIE 4.1. *Krata Banacha $C_{\mathbb{R}}(X)$ jest porządkowo zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy domknięcie każdego zbioru otwartego w X jest również otwarte.*

DOWÓD. Dla dowolnej ograniczonej funkcji rzeczywistej h na X oznaczmy

$$h_u(x) := \inf_{U \in \mathfrak{U}_x} \sup_{t \in U} h(t) \qquad x \in X,$$

gdzie $\mathfrak{U}_x$ oznacza bazę otoczeń punktu x.

Załóżmy, że domknięcie każdego zbioru otwartego w X jest otwarte. Niech $A \subset C_{\mathbb{R}}(X)$ będzie zbiorem ograniczonym w $C_{\mathbb{R}}(X)$., tzn. takim, że istnieje majoranta $h \in C_{\mathbb{R}}(X)$ dla której zachodzi nierówność $f \leqslant h \ \forall \ f \in A$. Możemy przy tym założyć, że A jest zbiorem skierowanym w górę, tzn. takim, że dla dowolnych dwóch elementów $f_1, f_2 \in A$ istnieje $f_3 \in A$ spełniający nierówności $f_1 \leqslant f_3$, $f_2 \leqslant f_3$ (dlaczego - ćwiczenie). Niech

$$g(x) := \sup_{f \in A} f(x) \qquad \text{dla } x \in X.$$

Jeżeli k jest dowolną majorantą zbioru A, to $f \leqslant g \leqslant k$ oraz $f \leqslant g_u \leqslant k$ dla $f \in A$ (ostatnią nierówność należy potraktować jako ćwiczenie). A więc, gdy wykażemy ciągłość g_u, to otrzymamy $g_u = \sup A$, bo g_u jest mniejsza lub równa od każdej z majorant A.

Niech $\alpha \in \mathbb{R}$ i niech $x_0 \in X$ będzie takie, że $g_u(x_0) < \alpha$. Na mocy definicji g_u, istnieje $\varepsilon > 0$ oraz otoczenie U punktu x_0 takie, że $\sup_{t \in U} g(t) \leqslant g_u(x_0) + \varepsilon < \alpha$. Wynika stąd otwartość zbioru $\{x \in X : g_u(x) < \alpha\}$. Oznacza to górną półciągłość funkcji g_u. Dla wykazania jej dolnej półciągłości zauważmy, że dla $\alpha \in \mathbb{R}$ zbiór

$$g^{-1}((\alpha, +\infty)) = \bigcup_{f \in A} f^{-1}((\alpha, +\infty)) = \bigcup_{f \in A, n \in \mathbb{N}} f^{-1}\left(\left[\alpha + \frac{1}{n}, +\infty\right)\right)$$

jest otwarty. Ponadto z definicji g_u dla $\alpha \in \mathbb{R}$ otrzymujemy

$$g_u^{-1}((\alpha, +\infty)) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} g_u^{-1}\left(\left[\alpha + \frac{1}{n}, +\infty\right)\right)$$
$$= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{g^{-1}\left(\left[\alpha + \frac{1}{n}, +\infty\right)\right)} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{g^{-1}\left(\left(\alpha + \frac{1}{n}, +\infty\right)\right)}.$$

Z założenia wynika, że każdy ze zbiorów $\overline{g^{-1}\left(\left(\alpha + \frac{1}{n}, +\infty\right)\right)}$ jest otwarty, a więc również zbiór $g_u^{-1}((\alpha, +\infty))$ jest otwarty. Zatem g_u jako górnie i dolnie półciągła jest ciągła.

Załóżmy teraz, że $C_{\mathbb{R}}(X)$ jest porządkowo zupełna. Niech $V \subsetneq X$ będzie otwartym, niepustym zbiorem. Z lematu Urysohna wynika, że V jest σ-zwarty, tzn. $V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ dla pewnej rodziny zbiorów zwartych $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Niech dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $f_n : X \to [0,1]$ będzie funkcją znikającą poza V oraz taką, że $f_n = 1$ na K_n. Wtedy $A := \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest ograniczonym zbiorem w $C_{\mathbb{R}}(X)$. Na mocy porządkowej zupełności $C_{\mathbb{R}}(X)$, istnieje funkcja $f := \sup_A$ i należy do $C_{\mathbb{R}}(X)$, a więc jest ciągła. Dla każdego $x \in X$ mamy $\sup_n f_n(x) \leqslant f(x)$, a zatem $f = 1$ na V oraz $f = 0$ na $X \setminus \overline{V}$. Z ciągłości f wynika, że $f = 1$ na $\overline{V}$, a więc $f = \chi_{\overline{V}}$. Jeżeli funkcja charakterystyczna zbioru jest ciągła, to musi on być domknięto-otwarty. Zatem $\overline{V}$ jest otwarty. □

Definicja 4.2. Przestrzeń topologiczną, w której domknięcie każdego zbioru otwartego jest również otwarte nazywamy *ekstremalnie niespójną* lub *stone'owską*.

Wniosek 4.3. *Widmo algebry $L^\infty(\mu)$ jest ekstremalnie niespójne.*

Dowód. Przestrzeń $L^\infty(\mu)$ z naturalnym mnożeniem funkcji jest przemienną C^*-algebrą. Na mocy twierdzenia Gelfanda-Najmarka (tw. 7.5, rozdział 2), jest ona $*$-izometrycznie izomorficzna z algebrą $C(Y)$ dla pewnego zbioru zwartego Y, przy czym Y jest widmem $L^\infty(\mu)$. Z wniosku 3.3 wynika, że jest ona dualna do przestrzeni $L^1(\mu)$. A więc jako krata Banacha jest porządkowo zupełna. Stąd, na mocy twierdzenia 4.1, zbiór Y jest ekstremalnie niespójny. □

Uwaga 4.4. Ostatni wniosek dotyczy algebry zespolonej, natomiast twierdzenie 4.1 przestrzeni rzeczywistej - jako ćwiczenie pozostaje wykazanie, że wniosek mimo to jest prawdziwy.

Bibliografia

[1] Y. A. Abramovich, C. D. Aliprantis, *An Invitation to Operator Theory*, American Mathematical Society – Providence, Rhode Island, 2002.

[2] ———, *Problems in Operator Theory*, American Mathematical Society – Providence, Rhode Island, 2002.

[3] T. W. Gamelin, *Uniform Algebras*, AMS Chelsea Publishing, American Mathematical Society – Providence, Rhode Island, 2005.

[4] W. Rudin, *Analiza funkcjonalna*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 2001.

[5] H. H. Schaefer, *Banach Lattices and Positive Operators*, Springer Verlag, Berlin and New York, 1974.

[6] W. Żelazko, *Algebry Banacha*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1968.