



Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica
w Krakowie

Praca licencjacka

Uogólnione Twierdzenie Newtona-Leibniza dla pochodnych funkcji absolutnie ciągłych

Antoni Ruciński

Kierunek: Matematyka

Nr albumu: 408463

Promotor

dr hab. Krzysztof Rudol, prof. AGH



Wydział Matematyki Stosowanej

Kraków 2023

Spis treści

1	Twierdzenie Vitaliego o pokryciu oraz różniczkowalność funkcji monotonicznych	3
1.1	Twierdzenie Vitaliego	3
1.2	Różniczkowalność funkcji monotonicznych	3
2	Funkcje o wahanii skończonym	7
2.1	Wahanie i jego własności	7
2.2	Twierdzenie Jordana oraz różniczkowalność prawie wszędzie	11
3	Funkcje absolutnie ciągłe	12
3.1	Absolutna ciągłość i jej własności	12
3.2	Absolutna ciągłość całki	14
4	Uogólnione Zasadnicze Twierdzenie Całkowe	15
4.1	Własności funkcji całkowalnych w sensie Lebesgue'a	15
4.2	Uogólnione Twierdzenia Newtona-Leibniza na całki Lebesgue'a	19

Wprowadzenie

Niniejsza praca ma na celu uogólnienie wszystkim dobrze znanego Twierdzenia Newtona-Leibniza, często nazywanego Zasadniczym Twierdzeniem Rachunku Całkowego. Uogólnienie to jest bardzo ważnym elementem rozważań na temat teorii funkcji rzeczywistych czy teorii miary. Będziemy zastanawiać się jakie założenia musi spełniać funkcja F aby wzór $\int_a^x F' d\lambda = F(x) - F(a)$ zachodził gdy całkę Riemanna zastąpimy całką Lebesgue'a. Okaże się, że F musi być absolutnie ciągła, a więc F' nie musi być całkowalna w sensie Riemanna jak to miało miejsce w klasycznym Twierdzeniu Newtona-Leibniza. Co ciekawe, pokażemy, że implikacja w drugą stronę również zachodzi, a więc otrzymamy istotną charakteryzację funkcji absolutnie ciągłych. Czym jest wspomniana absolutna ciągłość dowiemy się w rozdziale 3.

Aby jednak dojść do tych rezultatów będzie trzeba poznać szereg definicji, własności czy twierdzeń z dziedziny teorii miary czy funkcji rzeczywistych.

Już w pierwszym rozdziale poznamy Twierdzenie Vitaliego o pokryciu, które posłuży nam do dowodu faktu o różniczkowalności prawie wszędzie funkcji monotonicznych. Twierdzenie to nadaje się na temat osobnej pracy, dlatego przyjmiemy je bez dowodu.

W drugim rozdziale zajmiemy się funkcjami rzeczywistymi o skończonym wahanii, a kluczowym rezultatem będzie ich różniczkowalność prawie wszędzie.

W kolejnej części pracy omówimy wspomnianą już absolutną ciągłość funkcji oraz jej własności.

Ostatni rozdział jest już o tytułowym twierdzeniu pracy. Wprowadzimy potrzebne twierdzenia i lematy pomocnicze, aby następnie udowodnić Uogólnione Zasadnicze Twierdzenie Rachunku Całkowego.

Jasne jest, że skoro mówimy o całkach w sensie Lebesgue'a, różniczkowalności, ciągłości lub różnych własnościach które zachodzą prawie wszędzie (czyli wszędzie poza zbiorami miary Lebesgue'a zero), to dobrego zrozumienia pracy konieczna jest znajomość podstaw Analizy Matematycznej, a w szczególności teorii miary.

Jak to bywa w dowodach analitycznych, pojawi się wiele szacowań (nierówności, ograniczeń). Standardowo, niezastąpiona okaże się dobrze znana nierówność trójkąta. Równie istotne będą podstawowe fakty teorii miary takie jak przeliczalna addytywność miary Lebesgue'a czy podaddytywność miar zewnętrznych. Warto też wspomnieć o faktach teorii mnogości, nierównościach z nich wynikających oraz podstawowych rezultatach rachunku różniczkowego i całkowego (np. całkowalność w sensie Riemanna funkcji ciągłych.).

W pracy poprzez λ będziemy oznaczać jednowymiarową miarę Lebesgue'a, a poprzez λ^* zewnętrzną miarę Lebesgue'a. Pamiętając, że miara Lebesgue'a przedziału $I \subset \mathbb{R}$ to jego długość, może zdarzyć się, że będziemy oznaczać $|I| := \lambda(I)$.

1 Twierdzenie Vitaliego o pokryciu oraz różniczkowalność funkcji monotonicznych

Nasze rozważania rozpoczniemy od istotnego w kontekście dalszych wyników Twierdzenia Vitaliego o pokryciu. Przyjmiemy je bez dowodu. Będzie nam ono potrzebne jeszcze w tej części pracy do pokazania różniczkowalności prawie wszędzie funkcji monotonicznych jak i również w ostatnim dziale.

1.1 Twierdzenie Vitaliego

Definicja 1.1 (*pokrycie w sensie Vitaliego*)

Niech $E \subset \mathbb{R}$. Rodzina $\mathcal{F}$ niezdegenerowanych przedziałów zwartych pokrywa w sensie Vitaliego zbiór E , gdy:

$$\forall_{x \in E} \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{I \in \mathcal{F}} (x \in I \wedge \lambda(I) < \varepsilon) \quad (1.1)$$

Twierdzenie 1.1 (*Vitaliego o pokryciu*) Jeżeli rodzina $\mathcal{F}$ przedziałów zwartych niezdegenerowanych pokrywa zbiór $E \subset \mathbb{R}$ w sensie Vitaliego, to istnieje przeliczalna podrodzina $\mathcal{F}_* \subset \mathcal{F}$ złożona z przedziałów parami rozłącznych taka, że $\lambda(E \setminus \bigcup_{I \in \mathcal{F}_*} I) = 0$.

1.2 Różniczkowalność funkcji monotonicznych

Wprowadzimy definicję liczby pochodnej.

Definicja 1.2 (*liczba pochodna*) Mówimy, że $\alpha \in \langle -\infty; \infty \rangle$ jest liczbą pochodną funkcji $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ w punkcie $x_0 \in \langle a, b \rangle$, gdy istnieje ciąg h_n liczb niezerowych zbieżny do 0 taki, że:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} = \alpha$$

Wniosek 1.2 W każdym punkcie funkcja f posiada przynajmniej jedną liczbę pochodną, ponieważ każdy ciąg liczb rzeczywistych ma podciąg zbieżny lub rozbieżny do $\pm\infty$.

Obserwacja 1.3 Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 , to w tym punkcie posiada tylko jedną liczbę pochodną $\alpha = f'(x_0)$.

Obserwacja 1.4 Niech $f : \langle -1, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ i $f(x) = |x|$. Wówczas f ma w punkcie x_0 dwie liczby pochodne: $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1$.

Obserwacja 1.5 Niech $I := \langle a, b \rangle$ oraz $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ściśle rosnąca i różniczkowalna. Gdy jakaś liczba $p > 0$ spełnia warunek $f' < p$, to z twierdzenia Lagrange'a $f(b) - f(a) \leq p(b - a)$. Ponieważ funkcja z założenia jest ściśle rosnąca, to możemy zapisać w języku miary:

$$\lambda(f[I]) \leq p\lambda(I)$$

Okazuje się, że można nieco uogólnić powyższą obserwację dla liczb pochodnych.

Lemat 1.6 Niech $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ściśle rosnącą oraz $p > 0$ i $E \subset \langle a, b \rangle$ będzie dowolnym podzbiorem przedziału $\langle a, b \rangle$. Wówczas zachodzi implikacja:

$$\forall_{x \in E} \exists_{Df(x)} (Df(x) < p) \Rightarrow \lambda^*(f[E]) \leq p\lambda^*(E)$$

Inaczej mówiąc, jeżeli w każdym punkcie $x \in E$ istnieje liczba pochodna $Df(x) < p$, to $\lambda^*(f[E]) \leq p\lambda^*(E)$

Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Z definicji zewnętrznej miary Lebesgue'a istnieje zbiór otwarty M taki, że $E \subset M$ oraz:

$$\lambda(M) < \lambda^*(E) + \varepsilon \quad (1.2)$$

Ponieważ z założenia w każdym punkcie $x \in E$ zachodzi $Df(x) < p$, to wybieramy ciąg h_n o wyrazach niezerowych taki, że $h_n \rightarrow 0$ oraz dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy:

$$\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} < p \quad (1.3)$$

Przyjmijmy następujące oznaczenia dla $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n(x_0) := \begin{cases} \langle x_0, x_0 + h_n \rangle, & \text{dla } h_n > 0 \\ \langle x_0 + h_n, x_0 \rangle, & \text{dla } h_n < 0 \end{cases}$$

$$J_n(x_0) := \begin{cases} \langle f(x_0), f(x_0 + h_n) \rangle, & \text{dla } h_n > 0 \\ \langle f(x_0 + h_n), f(x_0) \rangle, & \text{dla } h_n < 0 \end{cases}$$

Innymi słowy $I_n(x_0)$ są przedziałami o krańcach x_0 i $x_0 + h_n$, a $J_n(x_0)$ przedziałami o krańcach $f(x_0)$ i $f(x_0 + h_n)$. Można założyć w dodatku zawartość przedziałów $I_n(x_0)$ w M . $J_n(x_0)$ nie jest przedziałem zdegenerowanym oraz $f[I_n(x_0)] \subset J_n(x_0)$, bo f jest ściśle rosnąca. Jasne, że $\lambda(I_n(x_0)) = |h_n|$ i $\lambda(J_n(x_0)) = |f(x_0 + h_n) - f(x_0)|$. Zauważmy, że lewa strona nierówności 1.3 jest dodatnia. Można więc zapisać:

$$\frac{|f(x_0 + h_n) - f(x_0)|}{|h_n|} < p$$

A stąd otrzymujemy:

$$\lambda(J_n(x_0)) < p\lambda(I_n(x_0)) \quad (1.4)$$

Ponieważ $h_n \rightarrow 0$, to $\lambda(I_n(x_0)) \rightarrow 0$, a więc z 1.4 dostajemy, że $\lambda(J_n(x_0)) \rightarrow 0$.

Niech $\mathcal{F} := \{J_n(x_0) : x_0 \in E \wedge n \in \mathbb{N}\}$. Zauważmy, że $\mathcal{F}$ pokrywa zbiór $f[E]$ w sensie Vitaliego, stąd na mocy Twierdzenia Vitaliego o pokryciu możemy wybrać przeliczalną podrodzinę $\mathcal{F}' := \{J_n(x_0) : x_0 \in E \wedge n \in \mathbb{N}\}$ rodziny $\mathcal{F}$ złożoną z przedziałów parami rozłącznych, spełniającą zależność:

$$\lambda\left(f[E] \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} J_{n_i}(x_i)\right) = 0 \quad (1.5)$$

Stąd otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\lambda^*(f[E]) &= \lambda^* \left(\left(f[E] \cap \bigcup_{i \in \mathbb{N}} J_{n_i}(x_i) \right) \cup \left(f[E] \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} J_{n_i}(x_i) \right) \right) \\
&\leq \lambda^* \left(f[E] \cap \bigcup_{i \in \mathbb{N}} J_{n_i}(x_i) \right) + \lambda^* \left(f[E] \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} J_{n_i}(x_i) \right) \\
&= \lambda^* \left(f[E] \cap \bigcup_{i \in \mathbb{N}} J_{n_i}(x_i) \right) \leq \lambda^* \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} J_{n_i}(x_i) \right) \\
&= \lambda \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} J_{n_i}(x_i) \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(J_{n_i}(x_i))
\end{aligned}$$

Odpowiednie przedziały $I_{n_i}(x_i)$ tworzą rodzinę rozłączną (w przeciwnym przypadku odpowiednie przedziały z rodziny $\mathcal{F}'$ by się przecinały). Stąd oraz z 1.2 mamy, że:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_{n_i}(x_i)) = \lambda \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_{n_i}(x_i) \right) \leq \lambda^*(E) \leq \lambda(M) \leq \lambda^*(E) + \varepsilon$$

Łącząc powyżej udowodnione dwie nierówności oraz nierówność 1.4 otrzymujemy:

$$\lambda^*(f[E]) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(J_{n_i}(x_i)) \leq p \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_{n_i}(x_i)) \leq p(\lambda^*(E) + \varepsilon)$$

Z dowolności $\varepsilon > 0$ otrzymujemy tezę. ■

Obserwacja 1.7 Niech $I := \langle a, b \rangle$ oraz $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ściśle rosnącą i różniczkowalną. Gdy jakaś liczba $q > 0$ spełnia warunek $f' > q$, to z twierdzenia Lagrange'a $f(b) - f(a) \geq q(b - a)$. Ponieważ funkcja z założenia jest ściśle rosnącą, to możemy zapisać w języku miary:

$$\lambda(f[I]) \geq p\lambda(I)$$

Analogicznie do poprzedniego przypadku, można uogólnić powyższą obserwację.

Lemat 1.8 Niech $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ściśle rosnącą oraz $q \geq 0$ i $E \subset \langle a, b \rangle$ będzie dowolnym podzbiorem przedziału $\langle a, b \rangle$. Wówczas zachodzi implikacja:

$$\forall x \in E \exists Df(x) (Df(x) > q) \Rightarrow \lambda^*(f[E]) \geq q\lambda^*(E)$$

Inaczej mówiąc, jeżeli w każdym punkcie $x \in E$ istnieje liczba pochodna $Df(x) > q$, to $\lambda^*(f[E]) \geq q\lambda^*(E)$

Dowód. Dowód lematu jest podobny do poprzedniego dowodu. Niech $\varepsilon > 0$. Z definicji zewnętrznej miary Lebesgue'a, znajdziemy taki zbiór otwarty M , że $f[E] \subset M$ oraz:

$$\lambda(M) < \lambda^*(f[E]) + \varepsilon \tag{1.6}$$

Niech $\hat{E}$ będzie zbiorem punktów, w którym funkcja f jest ciągła. Wówczas zbiór $E \setminus \hat{E}$ jest przeliczalny, ponieważ f jest funkcją monotoniczną. Korzystając z faktu,

iz istnieje liczba pochodna taka, że $Df(x_0) > q$, to $\forall_{x_0 \in \hat{E}}$ możemy wybrać ciąg h_n o wyrazach różnych od 0 taki, że $h_n \rightarrow 0$ i $\forall_{n \in \mathbb{N}}$ mamy:

$$\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} > q \quad (1.7)$$

Tak samo jak w dowodzie poprzedniego lematu definiujemy przedziały $I_n(x_0)$ oraz $J_n(x_0)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ $x_0 \in \hat{E}$ (funkcja f jest ciągła w x_0), to przedział $J_n(x_0)$ zbiega do punktu, a więc $\lambda(J_n(x_0)) \rightarrow 0$. Stąd można założyć zawartość wszystkich przedziałów $J_n(x_0)$ w zbiorze M . Analogicznie jak w poprzednim dowodzie po prostym przekształceniu nierówności 1.7, otrzymujemy:

$$\lambda(J_n(x_0)) > q\lambda(I_n(x_0)), \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} \quad (1.8)$$

Istotnym spostrzeżeniem jest, że rodzina $\mathcal{F} := \{I_n(x_0) : x_0 \in E \wedge n \in \mathbb{N}\}$ pokrywa zbiór $\hat{E}$ w sensie Vitaliego. Z twierdzenia Vitaliego o pokryciu wynika, że możemy wybrać przeliczalną podrodzinę $\mathcal{F}' := \{I_{n_i}(x_i) : i \in \mathbb{N}\}$ rodziny $\mathcal{F}$ złożoną z przedziałów parami rozłącznych, spełniającą zależność:

$$\lambda\left(\hat{E} \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_{n_i}(x_i)\right) = 0$$

Wówczas ponieważ $E \setminus \hat{E}$ jest zbiorem przeliczalnym, mamy:

$$\lambda\left(E \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_{n_i}(x_i)\right) = 0 \quad (1.9)$$

Stąd oraz z 1.8 i 1.6 otrzymujemy ciąg nierówności:

$$\begin{aligned} q\lambda^*(E) &= q\lambda^*\left(\left(E \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_{n_i}(x_i)\right) \cup \left(E \cap \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_{n_i}(x_i)\right)\right) \\ &\leq q\lambda^*\left(E \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_{n_i}(x_i)\right) + q\lambda^*\left(E \cap \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_{n_i}(x_i)\right) \\ &= q\lambda^*\left(E \cap \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_{n_i}(x_i)\right) \leq q\lambda^*\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_{n_i}(x_i)\right) = q\lambda\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_{n_i}(x_i)\right) \\ &\leq q \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_{n_i}(x_i)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(J_{n_i}(x_i)) \\ &\stackrel{(*)}{=} \lambda\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} J_{n_i}(x_i)\right) \leq \lambda(E) \leq \lambda(M) \leq \lambda^*(f[E]) + \varepsilon \end{aligned}$$

Odpowiednie przedziały $J_{n_i}(x_i)$ tworzą rodzinę podziałów rozłącznych ponieważ odpowiednie przedziały $I_{n_i}(x_i)$ tworzą rodzinę przedziałów rozłącznych. Stąd równość (*) zachodzi. Z dowolności ε otrzymujemy tezę. ■

Twierdzenie 1.9 (o różniczkowalności funkcji monotonicznych)

Każda monotoniczna funkcja $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna prawie wszędzie.

Dowód. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że funkcja $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ jest nie-malejąca. Okazuje się, że można również przyjąć, że rozważana funkcja jest rosnąca, ponieważ możemy zastąpić funkcję f funkcją $id + f$, gdyż obie mają te same punkty różniczkowalności. Niech zatem f będzie rosnącą.

Oznaczmy poprzez E zbiór tych punktów przedziału $\langle a, b \rangle$, w których funkcja f **nie** jest różniczkowalna. Niech E_∞ będzie zbiorem takich $x \in \langle a, b \rangle$, że ∞ jest liczbą pochodną funkcji f w punkcie x . Dla liczb wymiernych $p, q \in \mathbb{Q}$ oznaczamy

$$E_{pq} = \{x \in \langle a, b \rangle : \exists_{D_1f(x), D_2f(x)} (D_1f(x) < p < q < D_2f(x))\}$$

(zbiór takich $x \in \langle a, b \rangle$, dla których istnieją liczby pochodne $D_1f(x), D_2f(x)$ spełniające nierówność $D_1f(x) < p < q < D_2f(x)$). Ponieważ funkcja f jest rosnąca, to w każdym punkcie jej iloraz różnicowy jest dodatni, stąd wnioskujemy, że wszystkie liczby pochodne funkcji f w punktach zbioru E (czyli tam gdzie f nie jest różniczkowalna) są nieujemne. Jeżeli f nie jest różniczkowalna w punkcie x , czyli $x \in E$, to istnieją (co najmniej) 2 różne nieujemne liczby pochodne funkcji f w punkcie x lub ∞ jest liczbą pochodną funkcji f w punkcie x . Stąd $E = E_\infty \cup \bigcup_{p, q \in \mathbb{Q}_+} E_{pq}$. Wystarczy pokazać więc, że $\lambda(E_\infty) = 0$ oraz, że $\lambda(E_{pq}) = 0$ dla dowolnych $p, q \in \mathbb{Q}_+ : p < q$. W pierwszej kolejności rozważmy zbiór E_∞ . $f[E_\infty] \subset \langle f(a), f(b) \rangle$, ponieważ f jest ściśle rosnąca. W każdym punkcie $x \in E_\infty$ istnieje liczba pochodna $Df(x) = \infty > q \in \mathbb{N}$ (dowolnego naturalnego q).

Stąd po zastosowaniu lematu 1.8 mamy:

$$q\lambda^*(E_\infty) \leq \lambda^*(f[E_\infty]) \leq \lambda(f(\langle a, b \rangle)) = f(b) - f(a) < \infty$$

Stąd mamy

$$0 \leq \lambda^*(E_\infty) \leq \frac{f(b) - f(a)}{q}$$

a ponieważ q jest dowolną liczbą naturalną, to gdy przechodząc z $q \rightarrow \infty$ w nierówności otrzymujemy tezę.

Przeanalizujemy przypadek zbioru E_{pq} , gdzie $p, q \in \mathbb{Q}_+$ i $0 < p < q$. Na mocy lematu 1.6 oraz lematu 1.8 mamy:

$$q\lambda^*(E_{pq}) \leq \lambda^*(f[E_{pq}]) \leq p\lambda^*(E_{pq})$$

Ponieważ $p < q$, to z powyższej nierówności wynika, że $\lambda^*(E_{pq}) = 0$ co kończy dowód. ■

2 Funkcje o wahanu skończonym

W tej części pracy zajmiemy się ważnymi w teorii funkcji rzeczywistych funkcjami o wahanu skończonym. Okazuje się, że mają one wiele ciekawych własności. Przedstawimy je, a na koniec rozdziału pokażemy, że funkcje o wahanu skończonym są różniczkowalne prawie wszędzie.

2.1 Wahanie i jego własności

Zacniemy od wprowadzenia podstawowych definicji.

Definicja 2.1 (podział przedziału)

Podziałem przedziału $\langle a, b \rangle$ nazywamy skończony zbiór $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ taki, że:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b, \quad n \in \mathbb{N}$$

Poprzez $\mathcal{P}\langle a, b \rangle$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich podziałów przedziału $\langle a, b \rangle$.

Definicja 2.2 (wahanie funkcji)

Wahaniem funkcji $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy liczbę ze zbioru $\langle 0, \infty \rangle$ daną wzorem:

$$\bigvee_a^b f := \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| : \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\} \in \mathcal{P}\langle a, b \rangle \right\}$$

Gdy $\bigvee_a^b f < \infty$ to mówimy, że f jest funkcją o wahanii skończonym na $\langle a, b \rangle$.

Przedstawimy parę obserwacji oraz interesujących własności wahanii skończonego.

Obserwacja 2.1 Dowolna funkcja monotoniczna jest funkcją o wahanii skończonym: $\bigvee_a^b f = |f(b) - f(a)|$.

Obserwacja 2.2 Istnieją funkcje nieciągłe o wahanii skończonym, na przykład funkcje monotoniczne, które nie są ciągłe.

Obserwacja 2.3 funkcja $f : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x = 0 \\ x \cos \frac{1}{x}, & \text{gdy } x \in (0, 1) \end{cases}$$

ma wahanie nieskończone (zostawimy bez dowodu), więc istnieją funkcje ciągłe o wahanii nieskończonym.

Obserwacja 2.4 Funkcja, która spełnia warunek Lipschitza ma wahanie skończone.

Dowód. Niech $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia

$$\exists L > 0 \forall x, y \in \langle a, b \rangle |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

Niech $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\} \in \mathcal{P}\langle a, b \rangle$. Istotnie mamy

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq L \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = L(b - a)$$

Czyli $\bigvee_a^b f \leq L(b - a) < \infty$. ■

Stwierdzenie 2.5 Jeżeli $\langle s, t \rangle \subset \langle a, b \rangle$ i $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, to $\bigvee_s^t f \leq \bigvee_a^b f$.

Dowód. Niech $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ będzie dowolnym podziałem przedziału $\langle s, t \rangle$. Wówczas $Q = \{a, b\} \cup P$ jest podziałem $\langle a, b \rangle$. Stąd nierówność:

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq |f(x_0) - f(a)| + \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq |f(b) - f(x_n)| \leq \bigvee_a^b f$$

Z dowolności podziału P dostajemy tezę. ■

Twierdzenie 2.6 (*addytywność względem podziału*)

Jeśli $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ i $a < s < b$, to $V_a^b f = V_a^s f + V_s^b f$.

Dowód. Z poprzedniego stwierdzenia, gdy $V_a^s f = \infty$ lub $V_s^b f = \infty$ to tym bardziej $V_a^b f = \infty$. Załóżmy w takim razie, że $V_a^s f < \infty$ oraz $V_s^b f < \infty$. Pokażemy kolejno, że $V_a^b f \leq V_a^s f + V_s^b f$ oraz, że $V_a^b f \geq V_a^s f + V_s^b f$.

1. Niech $P = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}\langle a, b \rangle$. Gdy $s \in P$, to $s = x_j$ dla pewnego $j \in \{1, \dots, n-1\}$. Zauważmy, że $\{x_0, \dots, x_j\} \in \mathcal{P}\langle a, s \rangle$ oraz $\{x_j, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}\langle s, b \rangle$. Stąd mamy:

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^j |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sum_{i=j+1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq V_a^s f + V_s^b f$$

Gdy $s \notin P$, to istnieje takie $j \in \{0, \dots, n-1\}$, że $x_j < s < x_{j+1}$. Zauważmy, że $\{x_0, \dots, x_j, s\} \in \mathcal{P}\langle a, s \rangle$ oraz $\{s, x_{j+1}, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}\langle s, b \rangle$. Stąd mamy:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| &= \sum_{i=1}^j |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(x_{j+1}) - f(x_j)| \\ &+ \sum_{i=j+2}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^j |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(s) - f(x_j)| \\ &+ |f(x_{j+1}) - f(s)| + \sum_{i=j+2}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq V_a^s f + V_s^b f \end{aligned}$$

Ponieważ P jest dowolnym podziałem, to $V_a^b f \leq V_a^s f + V_s^b f$.

2. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Z definicji wahań wiadomo, że istnieją podziały $P = \{p_0, \dots, p_n\}$ oraz $Q = \{q_0, \dots, q_m\}$, gdzie $P \in \mathcal{P}\langle a, s \rangle$ i $Q \in \mathcal{P}\langle s, b \rangle$ takie, że

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |f(p_i) - f(p_{i-1})| &> V_a^s f - \frac{\varepsilon}{2} \text{ oraz} \\ \sum_{i=1}^m |f(q_i) - f(q_{i-1})| &> V_s^b f - \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Zauważmy, że $\{p_0, \dots, p_n = q_0, \dots, q_m\} \in \mathcal{P}\langle a, b \rangle$, więc sumując powyższe nierówności otrzymujemy:

$$V_a^b f \geq \sum_{i=1}^n |f(p_i) - f(p_{i-1})| + \sum_{i=1}^m |f(q_i) - f(q_{i-1})| > V_a^s f + V_s^b f - \varepsilon$$

Ponieważ $\varepsilon > 0$ jest dowolny, to otrzymujemy tezę. ■

Wniosek 2.7 Niech f będzie funkcją rzeczywistą przedziału $\langle a, b \rangle$ i niech $a < s < b$. Wówczas jeżeli $V_a^s f < \infty$ i $V_s^b f < \infty$, to $V_a^b f < \infty$.

Wprowadzimy teraz pojęcie oscylacji funkcji, które pojawi się w pewnym szacowaniu.

Definicja 2.3 (*oscylacja*)

Oscylacją funkcji $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ na przedziale $\langle a, b \rangle$ nazywamy liczbę

$$\text{osc}(f, \langle a, b \rangle) := \sup \{|f(y) - f(x)| : x, y \in \langle a, b \rangle\}$$

Obserwacja 2.8 Gdy $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, to zachodzi następująca nierówność:

$$|f(b) - f(a)| \leq \text{osc}(f, \langle a, b \rangle) \leq \bigvee_a^b f \quad (2.1)$$

Twierdzenie 2.9 Jeżeli $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją o wahanu skończonym, to jest ograniczona.

Dowód. Dla dowolnego $x \in \langle a, b \rangle$ mamy następujące szacowanie

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a)| \leq \bigvee_a^x f + |f(a)| \leq \bigvee_a^b f + |f(a)|$$

gdzie powyższe nierówności wynikają z 2.1 oraz ze stwierdzenia 2.5. ■

Twierdzenie 2.10 Niech f i g będą funkcjami rzeczywistymi przedziału $\langle a, b \rangle$. Wówczas zachodzą następujące własności:

1. Jeżeli $s \in \mathbb{R}$, to $\bigvee_a^b sf = |s| \bigvee_a^b f$ (w przypadku gdy $s = 0$, $a \bigvee_a^b f = \infty$, to $\bigvee_a^b sf = 0$).
2. $\bigvee_a^b (f + g) \leq \bigvee_a^b f + \bigvee_a^b g$
3. Jeżeli $\bigvee_a^b f < \infty$ i $\bigvee_a^b g < \infty$, to $\bigvee_a^b fg < \infty$
4. Jeżeli $\bigvee_a^b f < \infty$ oraz istnieje taka $\gamma > 0$, że dla każdego $x \in \langle a, b \rangle$ mamy $\gamma \leq |f(x)|$, to $\bigvee_a^b \frac{1}{f} < \infty$.

Dowód.

1. Niech $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ będzie dowolnym podziałem przedziału $\langle a, b \rangle$. Wówczas:

$$\sum_{i=1}^n |sf(x_i) - sf(x_{i-1})| = |s| \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

Po przejściu do supremum po podziałach przedziału $\langle a, b \rangle$ otrzymujemy tezę.

2. Niech $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ będzie dowolnym podziałem przedziału $\langle a, b \rangle$. Wówczas zachodzą nierówności

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |(f+g)(x_i) - (f+g)(x_{i-1})| &\leq \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^n |g(x_i) - g(x_{i-1})| \\ &\leq \bigvee_a^b f + \bigvee_a^b g \end{aligned}$$

Po przejściu z nierównością do supremum po podziałach przedziału $\langle a, b \rangle$ otrzymujemy tezę.

3. Niech $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ będzie dowolnym podziałem przedziału $\langle a, b \rangle$. Ponieważ f i g są funkcjami o wahanu skończonym na $\langle a, b \rangle$, to na mocy twierdzenia 2.9 istnieją takie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, że $\alpha > f(x)$ oraz $\beta > g(x) \forall x \in \langle a, b \rangle$. Mamy więc:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n |f(x_i)g(x_i) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})| \\ & \leq \sum_{i=1}^n |f(x_i)g(x_i) - f(x_i)g(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^n |f(x_i)g(x_{i-1}) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})| \\ & = \sum_{i=1}^n |f(x_i)| \cdot |g(x_i) - g(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^n |g(x_{i-1})| \cdot |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ & \leq |\alpha| \sum_{i=1}^n |g(x_i) - g(x_{i-1})| + |\beta| \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq |\alpha| \bigvee_a^b g + |\beta| \bigvee_a^b f < \infty \end{aligned}$$

Po przejściu do supremum po podziałach przedziału $\langle a, b \rangle$ z lewą stroną nierówności otrzymujemy tezę.

4. Niech $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ będzie dowolnym podziałem przedziału $\langle a, b \rangle$. Wówczas mamy:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left| \frac{1}{f(x_i)} - \frac{1}{f(x_{i-1})} \right| &= \sum_{i=1}^n \left| \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{f(x_i)f(x_{i-1})} \right| = \sum_{i=1}^n \frac{|f(x_i) - f(x_{i-1})|}{|f(x_i)||f(x_{i-1})|} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \frac{|f(x_i) - f(x_{i-1})|}{\gamma^2} \leq \frac{1}{\gamma^2} \bigvee_a^b f < \infty \end{aligned}$$

Po przejściu do supremum po podziałach przedziału $\langle a, b \rangle$ otrzymujemy tezę. ■

2.2 Twierdzenie Jordana oraz różniczkowalność prawie wszędzie

Sformułujemy istotne twierdzenie o rozkładzie, z którego będzie można otrzymać informacje o różniczkowalności funkcji o wahanu skończonym.

Twierdzenie 2.11 (*Jordana o rozkładzie*)

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją o wahanu skończonym wtedy i tylko wtedy, gdy jest różnicą dwóch funkcji niemalejących $g, h : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

Dowód. ($\Leftarrow$)

$f = g - h$. Ponieważ g i h są monotoniczne, to są funkcjami o wahanu skończonym (obserwacja pierwsza w rozdziale). Z twierdzenia 2.10 punk 1. mamy $\bigvee_a^b g - f = \bigvee_a^b h$ oraz z 2. mamy:

$$\bigvee_a^b (g + (-h)) \leq \bigvee_a^b g + \bigvee_a^b -h = \bigvee_a^b g + \bigvee_a^b h < \infty$$

($\Rightarrow$)

$\bigvee_a^b f < \infty$. Definiujemy $g(x) := \bigvee_a^x f$ dla $x \in (a, b)$ i $g(a) := 0$ oraz $h := g - f$.

Wówczas $f = g - h$. Pokażemy, że g i h są niemalejące. Jeżeli $x_1 < x_2$ i $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$, to $\langle a, x_1 \rangle \subset \langle a, x_2 \rangle$ więc ze stwierdzenia 2.5 $g(x_1) = \bigvee_a^{x_1} f \leq \bigvee_a^{x_2} f = g(x_2)$. Mamy również z tw. 2.6:

$$h(x_2) - h(x_1) = \bigvee_a^{x_2} f - f(x_2) - \bigvee_a^{x_1} f + f(x_1) = \bigvee_{x_1}^{x_2} f - (f(x_2) - f(x_1)) \geq 0$$

ponieważ $\bigvee_{x_1}^{x_2} f \geq |f(x_2) - f(x_1)| \geq f(x_2) - f(x_1)$. Stąd funkcje g i h są niemalejące. ■

Wniosek 2.12 (różniczkowalność prawie wszędzie)

Każda funkcja $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ o skończonym wahanu na $\langle a, b \rangle$ jest różniczkowalna prawie wszędzie.

Dowód. (z tw. Jordana)

Wiadomo, że f można przedstawić jako różnicę dwóch funkcji g i h , które są niemalejące. Z tw. 1.9 (o różniczkowalności funkcji monotonicznych) funkcje g i h są różniczkowalne poza jakimiś zbiorami odpowiednio E_g i E_h o mierze zero. Stąd f jako suma g i h jest różniczkowalna wszędzie poza zbiorem $E_g \cup E_h$, który też ma miarę zero. ■

3 Funkcje absolutnie ciągłe

W tym rozdziale zajmiemy się funkcjami absolutnie ciągłymi oraz podamy ich najważniejsze własności. Dowiemy się, że absolutna ciągłość jest mocniejsza od jednostajnej ciągłości, ale słabsza od warunku Lipschitza jak również tego, że funkcje absolutnie ciągłe mają skończone wahanie. Absolutna ciągłość funkcji będzie kluczowa do sformułowania Uogólnionego Zasadniczego Twierdzenia Całkowego dla całki Lebesgue'a w następnym rozdziale.

3.1 Absolutna ciągłość i jej własności

Definicja 3.1 Mówimy, że przedziały $\langle a, b \rangle$ i $\langle c, d \rangle$ nie zachodzą na siebie, gdy mają co najwyżej jeden punkt wspólny.

Wprowadzimy definicję absolutnej ciągłości.

Definicja 3.2 Mówimy że funkcja f jest absolutnie ciągła gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$, że dla każdego skończonego zbioru odcinków parami niezachodzących na siebie: $\{\langle a_i, b_i \rangle \subset \langle a, b \rangle, i = 1, 2, \dots, n\}$ zachodzi:

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$$

Obserwacja 3.1 Jeżeli funkcja jest absolutnie ciągła, to jest jednostajnie ciągła. Wynika to wprost z definicji dla $n = 1$.

Obserwacja 3.2 Łatwo pokazać, że zbiór wszystkich funkcji absolutnie ciągłych na przedziale $\langle a, b \rangle$ tworzy przestrzeń liniową z dodawaniem i mnożeniem przez skalar nad $\mathbb{R}$.

Sformułujemy teraz istotne twierdzenie, które da nam ważne informacje na temat funkcji absolutnie ciągłych, a do tego potrzebna będzie definicja:

Definicja 3.3 (*Średnica podziału*) Średnicą podziału $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\} \in \mathcal{P}(a, b)$ nazywamy liczbę

$$\max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, \dots, n\}.$$

Twierdzenie 3.3 *Każda funkcja absolutnie ciągła na $\langle a, b \rangle$ ma wahanie skończone.*

Dowód. Ustalmy $\varepsilon = 1$ i wybierzmy $\delta > 0$ zgodnie z definicją absolutnej ciągłości funkcji f . Niech $\{x_0, \dots, x_n\}$ będzie podziałem przedziału $\langle a, b \rangle$ o średnicy mniejszej od δ . Dla dowolnego i takiego, że $1 \leq i \leq n$, możemy wybrać podział przedziału $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$:

$$x_{i-1} = s_0 < s_1 < \dots < s_{k-1} < s_k = x_i$$

Wówczas $\sum_{j=1}^k (s_j - s_{j-1}) < \delta$, więc z absolutnej ciągłości $\sum_{j=1}^k (f(s_j) - f(s_{j-1})) < 1$. Z powyższej nierówności oraz z dowolności podziału $\{s_0, \dots, s_k\}$ przedziału $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ mamy po przejściu do supremum

$$\bigvee_{x_{i-1}}^{x_i} f \leq 1$$

Na mocy Twierdzenia 2.6 (addytywność wahaní względem podziału) mamy:

$$\bigvee_a^b f = \sum_{i=1}^n \bigvee_{x_{i-1}}^{x_i} f \leq n \cdot 1 = n < \infty$$

■

Obserwacja 3.4 *Funkcja absolutnie ciągła jest różniczkowalna p.w jako funkcja o wahaníu skończonej.*

Obserwacja 3.5 *Nie każda funkcja o wahaníu skończonej jest absolutnie ciągła (przykładem są nieciągłe funkcje o wahaníu skończonej).*

Obserwacja 3.6 *Nie każda funkcja ciągła jest absolutnie ciągła (przykładem jest już wspomniana ciągła funkcja o wahaníu nieskończonej $f(x) = x \cos \frac{1}{x}$).*

Obserwacja 3.7 *Jeżeli funkcja spełnia warunek Lipschitza, to jest absolutnie ciągła*

Dowód. Niech f będzie funkcją rzeczywistą przedziału $\langle a, b \rangle$ oraz niech

$$\forall x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle |f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

dla stałej $L > 0$. Niech $\varepsilon > 0$. Przyjmijmy $\delta := \varepsilon/L$. Wówczas dla dowolnej rodziny $\{\langle a_i, b_i \rangle, i = 1, 2, \dots, n\}$ przedziałów parami niezachodzących na siebie zawartych w $\langle a, b \rangle$ spełniających warunek $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$ mamy:

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| \leq \sum_{i=1}^n L(b_i - a_i) = L \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < L\delta = \varepsilon$$

■

Obserwacja 3.8 Nie każda funkcja absolutnie ciągła spełnia warunek Lipschitza. Przykładem takiej funkcji jest $f : \langle 0, 1 \rangle \ni x \mapsto \sqrt{x}$.

Twierdzenie 3.9 Funkcja absolutnie ciągła przekształca zbiory miary zero na zbiory miary zero.

Dowód. Niech $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ - absolutnie ciągła oraz $E \subset \langle a, b \rangle$ taki, że $\lambda(E) = 0$. Bez straty ogólności niech $E \subset (a, b)$. Standardowo ustalmy $\varepsilon > 0$ oraz dobierzmy $\delta > 0$ zgodnie z definicją funkcji absolutnie ciągłych. Możemy dobrać taki zbiór otwarty $M \subset (a, b)$, że $\lambda(M) < \delta$ oraz $E \subset M$. Zauważmy, że $M = \bigcup_k (a_k, b_k)$, gdzie (a_k, b_k) - ciąg przeliczalny parami rozłącznych przedziałów otwartych. Jeśli jest skończony, to w rozumowaniu nie musimy wykonywać przejścia granicznego. Z uwagi na to, że f jest absolutnie ciągła, to na przedziałach $\langle a_k, b_k \rangle$ osiąga swe kresy i ma własność Darboux, stąd istnieją przedziały $\langle s_k, t_k \rangle \subset \langle a_k, b_k \rangle$ takie, że

$$\lambda(f[\langle a_k, b_k \rangle]) = \lambda(f[\langle s_k, t_k \rangle]) = |f(t_k) - f(s_k)|$$

Zauważmy, że $\forall_{n \in \mathbb{N}}$ mamy: $\sum_{k=1}^n (t_k - s_k) \leq \lambda(M) < \delta$, Stąd z definicji absolutnej ciągłości mamy: $\sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(s_k)| < \varepsilon$. Po przejściu granicznym $n \rightarrow \infty$ mamy

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(t_k) - f(s_k)| \leq \varepsilon$$

Z powyższych rozważań otrzymujemy:

$$\lambda^*(f[E]) \leq \lambda^*(f[M]) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(f[\langle a_k, b_k \rangle]) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(f[\langle s_k, t_k \rangle]) = \sum_{k=1}^{\infty} |f(t_k) - f(s_k)| \leq \varepsilon$$

A ponieważ $\varepsilon > 0$ jest dowolnie mały to otrzymujemy, że $\lambda(f[E]) = 0$. ■

Obserwacja 3.10 Funkcja Cantora $f : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ nie jest absolutnie ciągła, ponieważ zbiór Cantora miary zero odwzorowuje na przedział $\langle 0, 1 \rangle$, a $\lambda(\langle 0, 1 \rangle) = 1$. A więc istnieją funkcje jednostajnie ciągłe, które nie są absolutnie ciągłe.

Wniosek 3.11 (z twierdzenia 3.9) Funkcja absolutnie ciągła odwzorowuje zbiory mierzalne na zbiory mierzalne. Dowód tego faktu, który jest topologiczny, pomijamy.

3.2 Absolutna ciągłość całki

Sformułujemy teraz bardzo istotną własność, zwaną absolutną ciągłością całki, która jest pewną charakterystyką całki Lebesgue'a.

Twierdzenie 3.12 (Absolutna ciągłość całki) Jeżeli $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją całkowalną w sensie Lebesgue'a na przedziale $\langle a, b \rangle$, to:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{E \text{ mierzalny}, E \subset \langle a, b \rangle} \left(\lambda(E) < \delta \Rightarrow \int_E |f| d\lambda < \varepsilon \right)$$

Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Z definicji całki Lebesgue'a $\int_a^b |f| d\lambda$ istnieje funkcja prosta $h : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że $\forall x \in \langle a, b \rangle |f(x)| \geq h(x) \geq 0$ i jednocześnie

$$\int_a^b h d\lambda > \int_a^b |f| d\lambda - \varepsilon/2 \quad (3.1)$$

h jest ograniczona jako funkcja prosta, czyli istnieje $m > 0$ takie, że $h(x) \leq m$ dla $x \in \langle a, b \rangle$. Przyjmijmy $\delta := \frac{\varepsilon}{2m}$. Niech $E \subset \langle a, b \rangle$ będzie dowolnym zbiorem mierzalnym takim, że $\lambda(E) < \delta$. Wówczas:

$$\int_E h d\lambda \leq m\lambda(E) < m\delta = m \cdot \frac{\varepsilon}{2m} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Stąd i z (3.1) mamy

$$\int_E |f| d\lambda = \int_E (|f| - h) d\lambda + \int_E h d\lambda < \int_E (|f| - h) d\lambda + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

■

Wniosek 3.13 *Jeżeli $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Lebesgue'a na $\langle a, b \rangle$, to funkcja $F(x) := \int_a^x f d\lambda$, gdzie $x \in \langle a, b \rangle$ jest absolutnie ciągła.*

Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$ oraz dobierzmy $\delta > 0$ zgodnie z Tw. 3.12. Niech $\{\langle a_i, b_i \rangle : i \leq n\}$ będzie rodziną przedziałów niezachodzących na siebie zawartych w $\langle a, b \rangle$ taką, że $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$. Niech $E := \bigcup_{i=1}^n \langle a_i, b_i \rangle$. Z twierdzenia 3.12 mamy, że $\int_E |f| d\lambda < \varepsilon$, czyli z addytywności całki względem przedziału całkowania $\sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} |f| d\lambda < \varepsilon$. Zauważmy, że

$$|F(b_i) - F(a_i)| = \left| \int_{a_i}^{b_i} f d\lambda \right| = \left| \int_{a_i}^{b_i} |f| d\lambda \right|$$

a zatem

$$\sum_{i=1}^n |F(b_i) - F(a_i)| = \sum_{i=1}^n \left| \int_{a_i}^{b_i} f d\lambda \right| \leq \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} |f| d\lambda < \varepsilon$$

co daje absolutną ciągłość F .

■

4 Uogólnione Zasadnicze Twierdzenie Całkowe

W ostatnim rozdziale zajmujemy się całkami Lebesgue'a oraz ich własnościami. Potrzebne one będą do dowodu Uogólnionego Twierdzenia Newtona-Leibniza na sam koniec. Twierdzenie to da nam istotną charakteryzację funkcji absolutnie ciągłych. W większości wspomniane własności będą odpowiednikami podstawowych własności funkcji całkowalnych w sensie Riemanna dla całek Lebesgue'a.

4.1 Własności funkcji całkowalnych w sensie Lebesgue'a

Twierdzenie 4.1 *Niech $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną w sensie Lebesgue'a. Wtedy $\int_a^x f d\lambda = 0$ dla każdego $x \in \langle a, b \rangle$ wtedy i tylko wtedy gdy $f = 0$ prawie wszędzie na $\langle a, b \rangle$.*

Dowód. ($\Leftarrow$)

Implikacja w tę stronę jest oczywista.

($\Rightarrow$)

Wiadomo, że $\forall x \in \langle a, b \rangle \int_a^x f d\lambda = 0$. Przyjmijmy oznaczenia:

$$X^+ = \{x \in (a, b) : f(x) > 0\}$$

$$X_n^+ = \{x \in (a, b) : f(x) > \frac{1}{n}\} \text{ dla } n \in \mathbb{N}$$

Założmy, że $\lambda(X_n^+) > 0$ dla jakiegoś $n \in \mathbb{N}$. Wówczas istnieje domknięty zbiór $m \subset X_n^+$, dla którego $\lambda(M) > 0$. Otwarty zbiór $(a, b) \setminus M$ można przedstawić jako sumę $\bigcup_k (a_k, b_k)$ skończoną lub nieskończoną ciąg parami rozłącznych przedziałów. Przyjmujemy przypadek nieskończony. Ponieważ $\int_a^x f d\lambda = 0$ dla dowolnego $x \in \langle a, b \rangle$, to z addytywności całki mamy dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$, że

$$\int_{a_k}^{b_k} |f| d\lambda = \int_a^{b_k} |f| d\lambda - \int_a^{a_k} |f| d\lambda = 0 - 0 = 0$$

Korzystając z przeliczalnej addytywności całki Lebesgue'a otrzymujemy:

$$\int_a^b f d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_k}^{b_k} f d\lambda + \int_M f d\lambda = 0 + \int_M f d\lambda \geq \int_M \frac{1}{n} d\lambda = \frac{1}{n} \int_M d\lambda = \frac{1}{n} \lambda(M) > 0$$

Gdzie pierwsza nierówność zachodzi z uwagi na definicję zbioru X_n^+ . To nam daje sprzeczność z założeniem, że $\forall x \in \langle a, b \rangle \int_a^x f d\lambda = 0$. W ten sposób udowodniliśmy, że $\lambda(X_n^+) = 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ $X = \bigcup_n X_n^+$, to z przeliczalnej addytywności miary $\lambda(X^+) = 0$. Zatem funkcja $f^+ := \max\{f, 0\}$ jest równa 0 prawie wszędzie na $\langle a, b \rangle$. Analogicznie przyjmując oznaczenia:

$$X^- = \{x \in (a, b) : f(x) < 0\}$$

$$X_n^- = \{x \in (a, b) : f(x) < -\frac{1}{n}\} \text{ dla } n \in \mathbb{N}$$

dowodzimy, że funkcja $f^- := \min\{f, 0\}$ jest równa 0 prawie wszędzie na $\langle a, b \rangle$. ■

Twierdzenie 4.2 *Niech $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną w sensie Lebesgue'a oraz $F(x) := \int_a^x f d\lambda$, gdzie $x \in \langle a, b \rangle$. Wówczas $F'(x) = f(x)$ prawie wszędzie na $\langle a, b \rangle$*

Dowód. Z wniosku 3.13 wynika, że F jest absolutnie ciągła, a więc F jest różniczkowalna prawie wszędzie na $\langle a, b \rangle$. Innymi słowy $F'(x)$ istnieje dla prawie wszystkich $x \in \langle a, b \rangle$. Wykazujemy twierdzenie stopniowo dla kolejnych założeń o funkcji f :

1. Niech f będzie ograniczona. Wówczas istnieje $m > 0$ takie, że $|f| \leq m$ na $\langle a, b \rangle$. Dla naturalnych oraz $x \in \langle a, b \rangle$ definiujemy ciąg funkcyjny:

$$f_n(x) := \frac{F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x)}{\frac{1}{n}} = \frac{\int_a^{x+\frac{1}{n}} f d\lambda - \int_a^x f d\lambda}{\frac{1}{n}} = n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f d\lambda$$

Tam gdzie $x + \frac{1}{n} > b$ przyjmujemy $F\left(x + \frac{1}{n}\right) = F(b)$.
Wówczas dla każdego n naturalnego i $\forall_{x \in \langle a, b \rangle}$ mamy:

$$|f_n(x)| = \left| n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f d\lambda \right| \leq \left| n \int_x^{x+\frac{1}{n}} m d\lambda \right| = nm \int_x^{x+\frac{1}{n}} d\lambda = n \cdot m \cdot \frac{1}{n} = m$$

co oznacza, że $f_n(x)$ są ograniczone. Zauważmy, że $f_n \rightarrow F'$ prawie wszędzie na $\langle a, b \rangle$, bo $\frac{1}{n} \rightarrow 0$. Korzystając z Twierdzenia Lebesgue'a o zmajorzowanym przejściu do granicy otrzymujemy, że dla dowolnego $s \in (a, b)$:

$$\int_a^s F' d\lambda = \int_a^s \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^s f_n d\lambda = (*)$$

Ponieważ F jest absolutnie ciągła, to jest ciągła. Stąd $f_n(x)$ jest ciągła jako różnica funkcji ciągłych. Stąd dla każdego n f_n jest całkowalna w sensie Riemanna, więc możemy zapisać:

$$\begin{aligned} (*) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^s f_n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_a^s \left(F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x) \right) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \int_a^s F\left(x + \frac{1}{n}\right) dx - n \int_a^s F(x) dx \right) = (**) \end{aligned}$$

Zauważmy, że:

$$\int_a^s F\left(x + \frac{1}{n}\right) dx = \left[\begin{array}{l} x + \frac{1}{n} = u \\ dx = du \end{array} \right] = \int_{a+\frac{1}{n}}^{s+\frac{1}{n}} F(u) du = \int_{a+\frac{1}{n}}^{s+\frac{1}{n}} F(x) dx$$

Stąd można zapisać:

$$\begin{aligned} (**) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \int_{a+\frac{1}{n}}^{s+\frac{1}{n}} F(x) dx - n \int_a^s F(x) dx \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \int_s^{s+\frac{1}{n}} F(x) dx - n \int_a^{a+\frac{1}{n}} F(x) dx \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_s^{s+\frac{1}{n}} F(x) dx - \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_a^{a+\frac{1}{n}} F(x) dx = (***) \end{aligned}$$

Zauważmy, że:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_s^{s+\frac{1}{n}} F(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{a+\frac{1}{n}}^{s+\frac{1}{n}} F(x) dx - \int_a^s F(x) dx}{\frac{1}{n}} = G'(s),$$

gdzie $G(x) := \int_a^x F(t) dt$ jako granica ilorazu różnicowego. Analogicznie $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_a^{a+\frac{1}{n}} F(x) dx = G'(a)$, gdzie rozumiemy to jako pochodną jednostronną w punkcie a , bo a jest krańcem dziedziny F . Ponieważ G jest funkcją górnej granicy całkowania funkcji ciągłej (całkowalnej) F , to na mocy Klasycznego Twierdzenia o funkcji górnej granicy całkowania $G'(s) = F(s)$ oraz $G'(a) = F(a)$. Stąd:

$$(***) = F(s) - F(a),$$

Zatem:

$$\int_a^s F' d\lambda = F(s) - F(a) = \int_a^s f d\lambda + \int_a^a f d\lambda = \int_a^s f d\lambda$$

Po przeniesieniu na lewą stronę dostajemy

$$\int_a^s F' d\lambda - \int_a^s f d\lambda = \int_a^s (F' - f) d\lambda = 0 \quad \forall s \in \langle a, b \rangle$$

Stąd na mocy twierdzenia 4.1 $F' - f = 0$ prawie wszędzie na $\langle a, b \rangle$, czyli $F' = f$ prawie wszędzie na $\langle a, b \rangle$.

2. Nie zakładamy teraz ograniczoności funkcji f .

Założmy jednak teraz, że $\forall x \in \langle a, b \rangle f(x) \geq 0$. Wynika z tego, że F jest niemalejąca, zatem $F' \geq 0$ wszędzie poza zbiorem miary zero. Zdefiniujmy ciąg funkcyjny:

$$f_n(x) := \min\{f(x), n\}, \text{ gdzie } x \in \langle a, b \rangle, n \in \mathbb{N}$$

Łatwo stwierdzić, że ciąg ten jest niemalejący oraz, że $f_n \rightarrow f$ na $\langle a, b \rangle$ przy $n \rightarrow \infty$. Zauważmy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ funkcja

$$F(x) - \int_a^x f_n d\lambda = \int_a^x f d\lambda - \int_a^x f_n d\lambda = \int_a^x (f - f_n) d\lambda$$

jest niemalejąca, bo dla wszystkich $x \in \langle a, b \rangle, n \in \mathbb{N}$ prawdą jest, że $f_n(x) \leq f(x)$. Stąd funkcja ta musi mieć pochodną nieujemną prawie wszędzie. Zauważmy, że $f_n(x) \leq n$, a więc funkcja f_n jest ograniczona. Stąd na mocy punktu **1.** pochodna funkcji $\int_a^x f_n d\lambda$ jest równa f_n prawie wszędzie na $\langle a, b \rangle$. Zatem pochodna funkcji $F(x) - \int_a^x f_n d\lambda$ jest równa $F'(x) - f_n(x)$ dla prawie wszystkich $x \in \langle a, b \rangle$. Mamy więc $F' - f_n \geq 0$ prawie wszędzie na $\langle a, b \rangle, \forall n \in \mathbb{N}$. Stąd po przejściu do granicy przy $n \rightarrow \infty$ mamy $F' - f \geq 0$ prawie wszędzie na $\langle a, b \rangle$. Ponieważ F jest niemalejąca, to można skorzystać z oszacowania całki dla funkcji niemalejących $\int_a^b F' d\lambda \leq F(b) - F(a)$. Mamy więc następującą nierówność:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b (F' - f) d\lambda = \int_a^b F' d\lambda - \int_a^b f d\lambda \leq F(b) - F(a) - \int_a^b f d\lambda = \\ &= \int_a^b f d\lambda - \int_a^b f d\lambda - \int_a^b f d\lambda = 0 \end{aligned}$$

Stąd $\int_a^b (F' - f) d\lambda = 0$ prawie wszędzie na $\langle a, b \rangle$. A ponieważ $F' - f \geq 0$ prawie wszędzie, to korzystając z własności całki Lebesgue'a dla funkcji mierzalnych nieujemnych otrzymujemy, że $F' = f$ prawie wszędzie na $\langle a, b \rangle$.

3. Niech $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowaną dowolnego znaku (przypadek ogólny). Wówczas:

$$F(x) = \int_a^x f d\lambda = \int_a^x f^+ d\lambda + \int_a^x f^- d\lambda = \int_a^x f^+ d\lambda - \int_a^x -f^- d\lambda$$

Stąd na mocy kroku **2.** ($f^+ \geq 0$ oraz $-f^- \geq 0$ na $\langle a, b \rangle$):

$$F'(x) = \left(\int_a^x f^+ d\lambda \right)' - \left(\int_a^x -f^- d\lambda \right)' = f^+(x) - (-f^-(x)) = f^+(x) + f^-(x) = f(x)$$

prawie wszędzie na $\langle a, b \rangle$. ■

Definicja 4.1 Funkcją singularną nazywamy różną od stałej funkcję monotoniczną f , dla której $f' = 0$ dla prawie wszystkich $x \in \langle a, b \rangle$.

Przykład. Funkcja Cantora na $\langle 0, 1 \rangle$ jest funkcją singularną.

Wniosek 4.3 (z Twierdzenia 4.2)

Dowolną niemalejącą funkcję $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ da się przedstawić w postaci sumy $f = g + h$ funkcji niemalejących, gdzie g -absolutnie ciągła, a h -singularna.

Dowód. Wiadomo, że f' istnieje dla prawie wszystkich $x \in \langle a, b \rangle$ oraz jest całkowna (jako pochodna). Przyjmijmy $g(x) := \int_a^x f' d\lambda$. g jest absolutnie ciągła na mocy wniosku 3.13. Ponieważ f jest niemalejąca, to $f' \geq 0$ prawie wszędzie. Stąd $g(x) = \int_a^x f' d\lambda$ jest niemalejąca. Przyjmijmy $h(x) := f(x) - g(x)$, gdzie $x \in \langle a, b \rangle$. Wtedy h nie jest funkcją stałą. Niech $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$ oraz $x_1 < x_2$. Wówczas na mocy oszacowania całki dla funkcji niemalejących mamy:

$$\begin{aligned} h(x_2) - h(x_1) &= f(x_2) - \int_a^{x_2} f' d\lambda - f(x_1) + \int_a^{x_1} f' d\lambda = f(x_2) - f(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} f' d\lambda \geq \\ &\geq f(x_2) - f(x_1) - f(x_2) + f(x_1) = 0 \end{aligned}$$

Stąd funkcja h jest niemalejąca. Zauważmy, że z Twierdzenia 4.2 wynika, że $g' = f'$. Zatem mamy:

$$h' = f' - g' = f' - f' = 0 \text{ dla p.w. } x \in \langle a, b \rangle$$

Stąd h jest singularna. ■

4.2 Uogólnione Twierdzenia Newtona-Leibniza na całki Lebesgue'a

Aby udowodnić tytułowe twierdzenie pracy będzie potrzebny nam jeszcze jeden lemat. W jego dowodzie użyjemy twierdzenia Vitaliego.

Lemat 4.4 Jeżeli $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją absolutnie ciągłą i $f' = 0$ prawie wszędzie na $\langle a, b \rangle$, to f jest stała.

Dowód. Dla dowolnego $s \in \langle a, b \rangle$ udowodnimy, że $f(s) = f(a)$. Gdy $s = a$, dowód się trywializuje, także przyjmijmy $s \in (a, b)$. Standardowo ustalmy $\varepsilon > 0$ i dobierzmy $\delta > 0$ tak, aby realizowała definicję absolutnej ciągłości. Zdefiniujmy zbiór $E := \{x \in (a, s) : f'(x) = 0\}$. f jako funkcja absolutnie ciągła jest różniczkowalna prawie wszędzie, więc $\lambda(E) = s - a$. Co więcej, dla dowolnego $x \in E$, istnieje liczba $H > 0$, która jest dowolnie mała i spełnia zależność:

$$\langle x, x + h \rangle \subset (a, s), \quad |f(x + h) - f(x)| < \varepsilon h \quad (4.1)$$

(iloraz różnicowy zbiega do zera). Jest to prawda, bo $\forall_{x \in E} f'(x) = 0$. Zauważmy, że rodzina przedziałów postaci $\langle x, x + h \rangle$ stanowi pokrycie Vitaliego zbioru E . Zatem z twierdzenia Vitaliego o pokryciu wiadomo, że istnieje skończona podrodzina $\{\langle x_i, y_i \rangle : 1 \leq i \leq n\}$ przedziałów parami rozłącznych rodziny przedziałów postaci $\langle x, x + h \rangle$ taka, że:

$$\lambda \left(E \setminus \bigcup_{i=1}^n \langle x_i, y_i \rangle \right) < \delta$$

Ponieważ $\lambda(E) = \lambda(\langle a, s \rangle) = s - a$, to łatwo wywnioskować, że

$$\lambda \left(\langle a, s \rangle \setminus \bigcup_{i=1}^n \langle x_i, y_i \rangle \right) < \delta$$

Możliwe jest uporządkowanie przedziałów w taki sposób, że $y_i \leq x_{i+1}$ dla $i = 1, 2, \dots, n-1$. Przyjmijmy również, że $y_0 := a, x_{n+1} := s$. Wówczas:

$$\begin{aligned} |f(s) - f(a)| &= \left| \sum_{i=0}^n (f(x_{i+1}) - f(y_i)) + \sum_{i=1}^n (f(y_i) - f(x_i)) \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^n |f(x_{i+1}) - f(y_i)| + \sum_{i=1}^n |f(y_i) - f(x_i)| < \\ &\stackrel{(1)}{<} \varepsilon + \varepsilon \sum_{i=1}^n |y_i - x_i| \stackrel{(2)}{<} \varepsilon + \varepsilon(s - a) = \varepsilon(1 + s - a) \end{aligned}$$

Gdzie nierówność (1) wynika z oszacowania pierwszego wyrazu korzystając z absolutnej ciągłości f , ponieważ rodzina $\{\langle y_i, x_{i+1} \rangle\}$ jest rodziną nienachodzących na siebie przedziałów, zaś drugi wyraz szacujemy korzystając z własności (4.1). Nierówność (2) wynika z szacowania sumy $\sum_{i=1}^n |y_i - x_i|$ przez $s - a$. Rzeczywiście, $\bigcup_{i=1}^n \langle x_i, y_i \rangle \subset (a, s)$, a przedziały $\langle x_i, y_i \rangle$ są rozłączne.

Z dowolności $\varepsilon > 0$ dostajemy, że $|f(s) - f(a)| = 0$ co oznacza, że $f(s) = f(a)$ dla dowolnego $s \in (a, b)$. ■

Sformułujemy Uogólnione Twierdzenie Newtona-Leibniza dla pochodnych funkcji absolutnie ciągłych.

Twierdzenie 4.5 *Niech $F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Poniższe warunki są równoważne:*

(A) *F jest absolutnie ciągła na $\langle a, b \rangle$*

(B) *Istnieje całkowalna funkcja $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że*

$$\int_a^x f d\lambda = F(x) - F(a)$$

(C) *F jest różniczkowalna prawie wszędzie na $\langle a, b \rangle$, a F' jest całkowalna na $\langle a, b \rangle$ oraz:*

$$\int_a^x F' d\lambda = F(x) - F(a)$$

Dowód. (C) $\Rightarrow$ (B)

Weźmy $f = F'$ i otrzymujemy tezę

(B) $\Rightarrow$ (A)

$$\int_a^x f d\lambda = F(x) - F(a)$$

Na mocy wniosku 3.13 funkcja $F(x) - F(a)$ jest absolutnie ciągła, zatem ponieważ $F(a)$ to stała, to $F(x)$ jest absolutnie ciągła.

(A) $\Rightarrow$ (C)

F -absolutnie ciągła, więc pochodna F' istnieje prawie wszędzie na $\langle a, b \rangle$ i jest całkowalna na $\langle a, b \rangle$ (jako pochodna). Zdefiniujmy funkcję:

$$g(x) := F(x) - \int_a^x F' d\lambda \text{ dla } x \in \langle a, b \rangle$$

Z wniosku 3.13 wiadomo, że funkcja $\int_a^x F' d\lambda$ jest absolutnie ciągła. Z twierdzenia 4.2 wiadomo, że $(\int_a^x F' d\lambda)' = F'$ dla prawie wszystkich $x \in \langle a, b \rangle$. Zatem $g' = F' - F' = 0$ prawie wszędzie na $\langle a, b \rangle$. Stosując lemat 4.4 dostajemy, że g jest funkcją stałą. Zatem dla każdego $x \in \langle a, b \rangle$ mamy:

$$g(x) = g(a) = F(a) - \int_a^a F' d\lambda = F(a) \quad (4.2)$$

Przekształcając definicję funkcji g mamy:

$$F(x) = g(x) + \int_a^x F' d\lambda$$

Zatem po zastosowaniu (4.2) otrzymujemy

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F' d\lambda$$

Po przeniesieniu na lewą stronę $F(a)$, dostajemy tezę ■

Wniosek 4.6 *Funkcja $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Lebesgue'a wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ absolutnie ciągła, dla której $F' = f$ prawie wszędzie na $\langle a, b \rangle$.*

Dowód. ($\Rightarrow$)

Ponieważ istnieje absolutnie ciągła F , to jest ona różniczkowalna prawie wszędzie na $\langle a, b \rangle$ i jej pochodna jest całkowalna na $\langle a, b \rangle$, czyli f jest całkowalne na $\langle a, b \rangle$.

($\Leftarrow$)

f -całkowalna na $\langle a, b \rangle$. Niech $F(x) := \int_a^x f d\lambda$ dla $x \in \langle a, b \rangle$. Z wniosku 3.13 $F(x)$ jest absolutnie ciągła, a z Twierdzenia 4.2 $f = F'$ dla prawie wszystkich $x \in \langle a, b \rangle$. ■

Literatura

- [1] Marek Balcerzak, *Kilka wykładów o funkcjach rzeczywistych*, Politechnika Łódzka, Łódź, 2022.
- [2] D. H. Fremlin, *Measure Theory, vol. 2*, University of Essex, Essex, 2010.
- [3] Stanisław Łojasiewicz, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*, PWN, Warszawa, 1976.