



AGH

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE
WYDZIAŁ MATEMATYKI STOSOWANEJ

Projekt dyplomowy

Twierdzenie Vitaliego o pokryciu i zastosowanie do
różniczkowalności prawie wszędzie
Vitali covering theorem and its applications to almost
everywhere differentiability

Autor: Katarzyna Elżbieta Adamus
Kierunek studiów: Matematyka
Opiekun pracy: Dr hab. Krzysztof Rudol

Kraków, 2024

Spis treści

1	Twierdzenie Vitaliego w $\mathbb{R}$	4
1.1	Twierdzenie Vitaliego o pokryciu w $\mathbb{R}$	4
2	Twierdzenie Vitaliego w $\mathbb{R}^n$	7
2.1	Wstęp i oznaczenia	7
2.2	Twierdzenie Vitaliego o pokryciu w $\mathbb{R}^n$	8
2.3	Obserwacje	12
3	Zastosowanie twierdzenia Vitaliego do różniczkowalności prawie wszędzie	13
3.1	Wstęp	13
3.2	Lemat o półciągłości z dołu	14
3.3	Twierdzenie o funkcji maksymalnej dla miary podwajającej . . .	14
3.4	Zastosowanie twierdzenia o funkcji maksymalnej	15
3.4.1	Twierdzenie pomocnicze	16
3.4.2	Twierdzenie o punktach Lebesgue’a	16
3.5	Lemat o funkcji absolutnie ciągłej	17
3.6	Zastosowanie	19

Wprowadzenie

Teoria miary to bardzo szeroka dziedzina z wieloma zastosowaniami. Za jej początki często przyjmuje się rok 1902. Wtedy to francuski matematyk Henri Léon Lebesgue przedstawił nową koncepcję całki, rewolucjonizując rozwój teorii funkcji rzeczywistych. Ta koncepcja opierała się na mierze Lebesgue'a i była rozszerzeniem istniejącego już pojęcia całki Riemanna opartej na mierze Jordana. Jednym z głównych motywów prac Vitaliego było jego zainteresowanie ideami Lebesgue'a. Pierwotnie Henri Lebesgue był przekonany, że każda funkcja ograniczona na przedziale jest całkowalna w sensie Lebesgue'a. W roku 1905 Giuseppe Vitali jako pierwszy przedstawił przykład niemierzalnego podzbioru liczb rzeczywistych, tzw. zbiór Vitaliego. Spotkało się to z pewnym oporem ze strony Lebesgue'a. W odpowiedzi na przedstawienie proponowanego przez Vitaliego zbioru, Lebesgue zaczął wręcz podważać aksjomat wyboru, aby odrzucić możliwość jego istnienia zbioru niecałkowalnego w sensie Lebesgue'a. Natomiast mimo własnego sprzeciwu, w teorii miary nadal korzystał on, co prawda nie wprost, z tego aksjomatu. Prace Vitaliego były kluczowe dla rozwoju zarówno teorii miary jak i analizy rzeczywistej.

Celem pracy jest przedstawienie jednego z wielu wyników dorobku naukowego Giuseppe Vitaliego, a mianowicie twierdzenia Vitaliego o pokryciu. Dla łatwości zrozumienia dowód, pierwszy rozdział przedstawia twierdzenie oraz jego dowód tylko dla przestrzeni $\mathbb{R}$. Następnie w rozdziale drugim uogólniamy ten dowód na przestrzeń $\mathbb{R}^n$. Z kolei w ostatnim rozdziale przedstawimy wartości uwagi zastosowania twierdzenia o pokryciu.

Rozdział 1

Twierdzenie Vitaliego w $\mathbb{R}$

1.1 Twierdzenie Vitaliego o pokryciu w $\mathbb{R}$

Niech A będzie ograniczonym zbiorem, takim że $A \subset \mathbb{R}$. $\mathcal{I}$ będzie rodziną nietrywialnych, domkniętych przedziałów z $\mathbb{R}$ takich, że każdy punkt ze zbioru A należy do dowolnie małego elementu $\mathcal{I}$. Wtedy istnieje przeliczalna rodzina $\mathcal{I}_0 \subseteq \mathcal{I}$, o następującej własności $\mu(A \setminus \bigcup \mathcal{I}_0) = 0$. Przedziały znajdujące się w $\mathcal{I}_0$ są parami rozłączne.

Dowód:

1° Jeżeli istnieje skończona rodzina $\mathcal{I}_0 \subseteq \mathcal{I}$ parami rozłącznych zbiorów, taka że $A \subseteq \bigcup \mathcal{I}_0$, to możemy zakończyć dowód. Warto tu zauważyć, że nie odrzucamy możliwości, że $A = \mathcal{I}_0 = \emptyset$. Łatwo dostrzec, że w takim przypadku twierdzenie jest spełnione trywialnie.

W dalszym ciągu dowodu zakładamy, że taka skończona rodzina $\mathcal{I}_0$ nie istnieje.

2° Niech μ^* oraz μ będą odpowiednio zewnętrzną miarą Lebesgue'a oraz miarą Lebesgue'a na $\mathbb{R}$. Weźmy M takie, że

$$\forall x \in A : |x| < M \quad (1.1)$$

M musi istnieć, gdyż A jest zbiorem ograniczonym. Definiujemy zbiór $\mathcal{I}'$ w następujący sposób

$$\mathcal{I}' = \{I : I \in \mathcal{I}, I \subseteq [-M; M]\}. \quad (1.2)$$

Jeśli $\mathcal{F}$ jest skończonym podzbiorem $\mathcal{I}'$, to istnieje pewien zbiór $J \in \mathcal{I}'$ rozłączny z każdym przedziałem z $\mathcal{F}$. Skoro J ma być niepusty musi znajdować się w nim co najmniej jeden element. Oznaczmy go przez x .

Skoro $x \in A \setminus \bigcup \mathcal{F}$, to istnieje pewna liczba rzeczywista $0 < \delta < 1$, taka że

przedział $[x - \delta; x + \delta]$ jest rozłączny z każdym ze zbiorów $\mathcal{I}_0$. Na mocy (1.1) możemy założyć, że $[x - \delta; x + \delta] \subset [-M; M]$. Niech J będzie elementem $\mathcal{I}$ zawierającym x o mierze co najwyżej równej δ . Wówczas $J \in \mathcal{I}'$ i $J \cap E = \emptyset$, gdzie $E \in \mathcal{F}$. Spełnia to postawioną przez nas tezę tym samym kończąc ten krok dowodu.

3° Teraz skonstruujemy indukcyjnie pewien ciąg liczb rzeczywistych $\{\gamma_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ oraz związany z nim ciąg $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ składający się z elementów $\mathcal{I}'$. Ciąg $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ definiujemy rekurencyjnie.

Mając już parami rozłączne zbiory $I_1, \dots, I_{k-1}$ z rodziny $\mathcal{I}'$ rozważamy

$$\mathcal{J}_k = \{I \in \mathcal{I}' : \forall_{i < k} I \cap I_i = \emptyset\}. \quad (1.3)$$

Z poprzedniej części dowodu wiemy, że $\mathcal{J}_k \neq \emptyset$.

Definiujemy ciąg $\{\gamma_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ jako

$$\gamma_k = \sup\{\mu(I) : I \in \mathcal{J}_k\}. \quad (1.4)$$

Wtedy $0 < \gamma_k \leq 2M$, ponieważ każdy przedział w $\mathcal{J}_k$ jest zawarty w $[-M, M]$.

Możemy wybrać zbiór $I_k \in \mathcal{J}_k$ taki, że $\mu(I_k) \geq \frac{1}{2}\gamma_k$.

Kontynuujemy tę konstrukcję, indukcyjnie tworząc ciąg parami rozłącznych przedziałów $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ w $\mathcal{I}'$.

4° Z faktu, że I_k są parami rozłącznymi, mierzalnymi w sensie Lebesgue'a podprzedziałami $[-M, M]$ wynika, że

$$\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \leq 2 \sum_{k=0}^{\infty} \mu(I_k) \leq 4M < \infty \quad (1.5)$$

oraz $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = 0$.

Teraz zdefiniujemy zbiór I'_k jako domknięty przedział o tym samym punkcie środkowym co I_k , ale o pięciokrotnie większej długości w taki sposób, że nowy przedział wykracza po obu stronach poza końce zbioru I_k o co najmniej γ_k .

Dobór konkretnie liczby 5 będzie wyjaśniony w rozdziale drugim.

Twierdzimy, że

$$\forall_{k \in \mathbb{N}} : A \subseteq \bigcup_{i < k} I_i \cup \bigcup_{i \geq k} I'_i. \quad (1.6)$$

Weźmy $x \in A \setminus (\bigcup_{i < k} I_i \cup \bigcup_{i \geq k} I'_i)$. Możemy dobrać $\delta > 0$ takie, że

$$[x - \delta; x + \delta] \subseteq [-M; M] \setminus \bigcup_{i < k} I_i. \quad (1.7)$$

Również wybieramy $J \in \mathcal{I}$ tak, aby

$$x \in J \subseteq [x - \delta; x + \delta]. \quad (1.8)$$

Wtedy

$$\mu(J) > 0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \gamma_m, \quad (1.9)$$

gdzie m to najmniejszy, całkowity indeks nie mniejszy niż k oraz o własności $\gamma_m \leq \mu(J)$. W takim przypadku J nie może należeć do $\mathcal{J}_m$, czyli musi istnieć jakieś $l < m$, dla którego $J \cap I_l \neq \emptyset$, ponieważ jesteśmy już pewni, że $J \in \mathcal{I}'$.

Z (1.7) wiemy, że l nie może być mniejsze od n , więc $k \leq l < m$ i $\gamma_k \geq \mu(J)$.

Odległość x od najbliższego końca I_l ma długość co najwyżej $\mu(J) \leq \gamma_l$. Natomiast końce I'_l wykraczają poza końce I_l o co najmniej γ_l , co z kolei oznacza, że $x \in I'_l$. Jest to oczywiście sprzeczne z pierwotnym wyborem x .

5° Ostatni krok dowodu. Wiemy już, że

$$\mu^*(A \setminus \bigcup_{i < k} I_i) \leq \mu(\bigcup_{i \geq k} I'_i) \leq \sum_{i=k}^{\infty} \mu(I'_i) \leq 5 \sum_{i=k}^{\infty} \mu(I_i).$$

Przekształcając (1.5) otrzymujemy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu(I_k) \leq 2M < \infty. \quad (1.10)$$

Musi również zachodzić

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu^*(A \setminus \bigcup_{i < k} I_i) = 0 \quad (1.11)$$

oraz

$$\mu(A \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i) = \mu^*(A \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i) \leq \inf_{k \in \mathbb{N}} \mu^*(A \setminus \bigcup_{i < k} I_i) = 0.$$

Możemy określić $\mathcal{I}_0 = \{I_k : k \in \mathbb{N}\}$, który spełnia założenia rozłącznej, przeliczalnej rodziny zbiorów w rodzinie $\mathcal{I}$ oraz spełnia warunek $\mu(A \setminus \bigcup \mathcal{I}_0) = 0$.

Co kończy dowód całego twierdzenia. ■

Rozdział 2

Twierdzenie Vitaliego w $\mathbb{R}^n$

2.1 Wstęp i oznaczenia

W obecnym rozdziale symbolami μ oraz μ^* będziemy oznaczać odpowiednio miarę Lebesgue’a i zewnętrzną miarę Lebesgue’a w n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$.

Wektory należące do $\mathbb{R}^n$ będziemy oznaczać literami alfabetu łacińskiego. Dla rozróżnienia współrzędne takich wektorów będą oznaczane literami alfabetu greckiego np. $a = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \in \mathbb{R}^n$. Normę euklidesową takiego wektora oznaczamy,

$$\|a\| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2}.$$

Oczywiście jako miara spełnia ona następujące własności,

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ oraz } \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

dla dowolnych wektorów x, y oraz skłara α .

Będziemy stosować oznaczenia dwóch charakterystycznych wektorów

$$\vec{0} = [0, 0, \dots, 0] \wedge \vec{1} = [1, 1, \dots, 1].$$

Przyjmijmy następujące oznaczenia kostek. Weźmy dowolne $a, b \in \mathbb{R}^n$

$$[a, b) := \{z : \alpha_i \leq \zeta_i < \beta_i, \forall i \leq n\},$$

$$(a, b) := \{z : \alpha_i < \zeta_i < \beta_i, \forall i \leq n\},$$

$$[a, b] := \{z : \alpha_i \leq \zeta_i \leq \beta_i, \forall i \leq n\}.$$

Jeżeli $x \in \mathbb{R}^n$ oraz $r > 0$, $\overline{K}(x, r)$ będzie kulą domkniętą o środku w x i o promieniu r :

$$\overline{K}(x, r) = \{y : y \in \mathbb{R}^n, \|y - x\| \leq r\}.$$

Zauważmy, że

$$\overline{K}(x, r) = x + \overline{K}(0, r),$$

więc z niezmienności miary Lebesgue'a względem translacji otrzymujemy

$$\mu(\overline{K}(x, r)) = \mu(\overline{K}(0, r)) = K_n r^n,$$

gdzie przez K_n rozumiemy miarę kuli,

$$K_n = \frac{1}{n!} \pi^{n/2}, \quad n = 2k$$

$$K_n = \frac{2^{2k+1} k!}{(2k+1)!} \pi^{n/2}, \quad n = 2k+1.$$

W dalszym ciągu rozważań oznaczenia $\overline{K}(x, r)$ i $K(x, r)$ będziemy używać wymiennie.

2.2 Twierdzenie Vitaliego o pokryciu w $\mathbb{R}^n$

Niech $A \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie dowolnym zbiorem oraz $\mathcal{I}$ rodziną domkniętych, nietrywialnych kul z $\mathbb{R}^n$ takich, że każdego elementu ze zbioru A zawiera się w pewnej kuli z $\mathcal{I}$ o dowolnie małym promieniu. Wtedy istnieje przeliczalna rodzina $\mathcal{I}_0 \subseteq \mathcal{I}$ składająca się z parami rozłącznych kul, taka że $\mu(A \setminus \bigcup \mathcal{I}_0) = 0$.

Dowód:

Analogicznie jak w przypadku przestrzeni $\mathbb{R}$ dowód podzielimy na etapy.

Aż do kroku 5° przyjmujemy, że

$$\forall x \in A : \|x\| < M \tag{2.1}$$

oraz definiujemy zbiór

$$\mathcal{I}' = \{I : I \in \mathcal{I}, I \subseteq K(\vec{0}, M)\}. \tag{2.2}$$

1° Jeżeli istnieje skończona rodzina $\mathcal{I}_0 \subseteq \mathcal{I}'$ składająca się z parami rozłącznych kul, taka że $A \subseteq \bigcup \mathcal{I}_0$, to teza twierdzenia jest spełniona. Nie odrzucamy tu trywialnego przypadku, w którym $A = \mathcal{I}_0 = \emptyset$.

W dalszych rozważaniach zakładamy, że taki skończony zbiór $\mathcal{I}_0$ nie istnieje.

2° Jeśli $\mathcal{F}$ jest dowolnym skończonym podzbiorem zbioru $\mathcal{I}'$ o parami rozłącznych elementach, to istnieje zbiór $J \in \mathcal{I}'$, który jest rozłączny z dowolnym elementem z $\mathcal{I}_0$.

Weźmy pewne $x \in A \setminus \bigcup \mathcal{I}_0$. Skoro dowolny element z $\mathcal{F}$ jest domknięty, to istnieje $r > 0$ takie, że $K(x, r)$ nie pokrywa się z żadnym elementem z $\mathcal{I}_0$ oraz zachodzi (2.1), to w konsekwencji $K(x, r) \subseteq K(\vec{0}, r)$.

Niech J będzie elementem z $\mathcal{I}$ zawierającym x o średnicy zbioru co najwyżej równej r . Wtedy $J \in \mathcal{I}'$ i $J \cap E = \emptyset$, gdzie $E \in \mathcal{F}$.

3° Możemy indukcyjnie skonstruować ciąg rzeczywisty $\{\gamma_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ oraz związany z nim ciąg $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{I}'$. Zakładamy, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ mamy już zdefiniowane zbiory $\{I_i\}_{i < k}$, gdzie $I_i \in \mathcal{I}'$ dla każdego $i < k$. Ponadto, przyjmujemy, że $\forall i < j < k : I_i \cap I_j = \emptyset$.

Ustalmy zbiór

$$\mathcal{J}_k = \{I : I \in \mathcal{I}' ; I \cap I_i = \emptyset \forall i < k\}. \quad (2.3)$$

Z 2° wiemy, że $\mathcal{J}_k \neq \emptyset$, co pozwala nam zdefiniować ciąg liczbowy $\{\gamma_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ jako

$$\gamma_k = \sup\{\text{diam}(I) : I \in \mathcal{J}_k\}. \quad (2.4)$$

Wtedy $\gamma_k \leq 2M$, ponieważ każdy element zbioru $\mathcal{J}_k$ zawiera się w kuli domkniętej $K(\vec{0}, M)$. To gwarantuje możliwość wyboru zbioru $I_k \in \mathcal{J}_k$ takiego, że

$$\text{diam}(I_k) \geq \frac{1}{2}\gamma_k$$

i tak kontynuujemy konstrukcję indukcyjnie.

4° Zbiory z I_k są rozłącznymi, mierzalnymi podzbiórami ograniczonej kuli $K(\vec{0}, M)$. Z czego wynika, że

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu(I_k) \leq \mu(K(\vec{0}, M)) < \infty, \quad (2.5)$$

oraz

$$\forall k \in \mathbb{N} : \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(I_k) = 0, \quad (2.6)$$

$$\mu(I_k) \geq K_n \left(\frac{1}{4}\gamma_k\right)^n, \quad (2.7)$$

co z kolei oznacza, że

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = 0. \quad (2.8)$$

Przez I'_k oznaczamy domkniętą kulę współśrodkową z I_k , ale o pięciokrotnie większej średnicy, tak aby zawierała każdy punkt z I_k w odległości co najwyżej γ_k .

Zakładamy **nie wprost**, że $\forall_{k \in \mathbb{N}}$

$$A \subseteq \bigcup_{i < k} I_i \cup \bigcup_{i \geq k} I'_i.$$

Niech $x \in A \setminus (\bigcup_{i < k} I_i \cup \bigcup_{i \geq k} I'_i)$ oraz niech $r > 0$ będzie takie, że

$$K(x, r) \subseteq K(\vec{0}, M) \setminus \bigcup_{i < k} I_i, \quad (2.9)$$

oraz $J \in \mathcal{I}$ będzie takie, że $x \in J \subseteq K(x, r)$. Wtedy

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \gamma_m = 0 < \text{diam}(J). \quad (2.10)$$

Tu stosujemy naszą hipotezę, że wszystkie kule w $\mathcal{I}$ są nietrywialne. Ustalmy, że m to najmniejszy indeks co najmniej równy k takim, że $\gamma_m < \text{diam}(J)$. W takim przypadku J nie może należeć do $\mathcal{J}_m$, więc musi istnieć jakieś $j < m$ takie, że $J \cap I_j \neq \emptyset$, bo wiemy na pewno, że $J \in \mathcal{I}'$. Natomiast z wyboru r wynika, że j nie może być mniejsze od k . Łącząc te spostrzeżenia otrzymujemy $k \leq j < m$ oraz $\gamma_j \geq \text{diam}(J)$. Prowadzi do wniosku, że x jest oddalone od najbliższego punktu z I_j o co najwyżej $\text{diam}(J) \leq \gamma_j$. Ale to znaczyłoby, że $x \in I'_j$, co zaprzecza pierwotnemu wyborowi x .

5° Wnioskujemy, że

$$\mu^*(A \setminus (\bigcup_{i < k} I_i)) \leq \mu(\bigcup_{i \geq k} I'_i) \leq \sum_{i=k}^{\infty} \mu(I'_i) \leq 5^n \sum_{i=k}^{\infty} \mu(I_i)$$

Na mocy (2.5), (2.6) oraz,

$$\mu(A \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i) = \mu^*(A \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i)$$

wiemy, że możemy zdefiniować $\mathcal{I}_0 = \{I_k : k \in \mathbb{N}\}$ tak, aby otrzymać rodzinę przeliczalnych, parami rozłącznych zbiorów $\mathcal{I}$ z własnością

$$\mu(A \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{I}_0) = 0.$$

To kończy dowód dla przypadku, gdy A jest ograniczone.

6 ° Rozważmy przypadek ogólny, gdy nie wiemy czy A jest ograniczone. Definiujemy dla każdego $k \in \mathbb{N}$

$$U_k = \{x : x \in \mathbb{R}^n, k < \|x\| < k+1\},$$

$$A_k = A \cap U_k \text{ oraz } \mathcal{I}_k = \{I : I \in \mathcal{I}, I \subseteq U_k\}.$$

Widzimy, że dla każdego k każdy element z A_k należy do dowolnie małego elementu z $\mathcal{I}_k$, więc istnieje przeliczalny, rozłączny zbiór $\mathcal{I}'_k \subseteq \mathcal{I}_k$ taki, że

$A_k \setminus \bigcup \mathcal{I}'_k$ jest pomijalny z dokładnością do zbiorów miary zero. Teraz (skoro U_k są rozłączne) $\mathcal{I}_0 = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{I}'_k$ jest rozłączny i oczywiście $\mathcal{I}_0$ jest przeliczalnym podzbiorem rodziny $\mathcal{I}$. Co więcej

$$A \setminus \bigcup \mathcal{I}_0 \subseteq (\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k) \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (A_k \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{I}'_k)$$

jest pomijalny z dokładnością do zbiorów miary zero. Aby zobaczyć, że

$$\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k = \{x : \|x\| \in \mathbb{N}\}$$

faktycznie jest pomijalny możemy spojrzeć na

$$\forall_{k \in \mathbb{N}} : \{x : \|x\| = k\} \subseteq K(\vec{0}, k) \setminus K(\vec{0}, rk).$$

Wyrażenie to ma miarę co najwyżej równą $K_n - K_n(rk)^n \forall_{r \in [0,1]}$, więc musi być miary zero.

Co ostatecznie kończy dowód. ■

2.3 Obserwacje

Twierdzenie o pokryciu zachodzi również dla innych miar. Są to tzw. miary z własnością podwajania na przestrzeniach metrycznych. Miara na przestrzeni metrycznej X posiada własność podwajania jeżeli istnieje stała C taka, że

$$\forall_{x \in X} \forall_{r > 0} : 0 < \mu(K(x, 4r)) \leq C \mu(K(x, r)) < \infty.$$

Mówimy, że μ jest C -podwajalna. Można udowodnić, że $C \geq 2$. Stąd właśnie nazwa "podwajanie".

W dowodzie twierdzenia o pokryciu jedyną własnością miary Lebesgue'a, z której w sposób istotny korzystamy, jest fakt, że miara kuli o promieniu $2r$ daje się oszacować przez pewną uniwersalną (uniwersalną w rozumieniu jednakową w każdym punkcie przestrzeni) stałą C razy miara kuli o tym samym środku i promieniu r

$$\mu(K(x, 4r)) \leq C^2 \mu(K(x, r)).$$

Miarę $K(x, 5r) \subset K(x, 2^3 r)$ szacujemy przez $C^3 \mu(K(x, r))$. Właśnie z tego wynika dobór konkretnie liczby 5 w dowodzie twierdzenia o pokryciu.

Rozdział 3

Zastosowanie twierdzenia Vitaliego do różniczkowości prawie wszędzie

3.1 Wstęp

Pewnym wykorzystaniem twierdzenia Vitaliego o pokryciu jest twierdzenie o funkcji maksymalnej. Twierdzenie to jest istotne w teorii funkcji rzeczywistych i analizie harmonicznej przy m.in. badaniu zbieżności i różniczkowości funkcji.

Definicja 3.1 Jeszcze raz przedstawimy definicję miary podwajającej z minimalną modyfikacją. Niech μ będzie dodatnią, lokalnie skończoną miarą borelowską. Mówimy, że miara jest podwajająca, jeśli istnieje jakaś stała $C > 0$, taka że

$$\forall_{x \in \mathbb{R}^n} \forall_{r > 0} : \mu(K(x, 2r)) \leq C\mu(K(x, r)). \quad (3.1)$$

Definicja 3.2

Niech μ będzie dodatnią, lokalnie skończoną miarą borelowską oraz ν dodatnią miarą borelowską. Definiujemy

$$\forall_{x \in \mathbb{R}^n} : \mathcal{M}'_{\mu}(\nu)(x) = \sup_{x \in K} \frac{\nu(K)}{\mu(K)}, \quad (3.2)$$

gdzie przez $x \in K$ mamy na myśli supremum po kulach, które zawierają x , a niekoniecznie kulach o środku w x . Stąd właśnie nazwa **niescentrowana** funkcja maksymalna.

Jeśli funkcja f jest lokalnie całkowalna względem miary $d\mu$, to $\mathcal{M}'_{\mu}(f) = \mathcal{M}'_{\mu}(\nu)$, gdzie $d\nu = |f|d\mu$. Wtedy

$$\mathcal{M}'_{\mu}(f)(x) = \sup_{x \in K} \frac{1}{\mu(K)} \int_K |f| d\mu. \quad (3.3)$$

3.2 Lemat o półciągłości z dołu

$\mathcal{M}'_\mu(\nu)$ jest funkcją półciągłą z dołu, więc również borelowską.

Dowód:

Aby wykazać, że $\mathcal{M}'_\mu(\nu)$ jest półciągłą z dołu, musimy pokazać, że dla każdego $\lambda > 0$ zbiór $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}'_\mu(\nu)(x) > \lambda\}$ jest otwarty.

Weźmy pewną $\lambda > 0$ oraz $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}'_\mu(\nu)(x) > \lambda\}$. Istnieje kula K do której należy punkt x , taka że

$$\frac{\nu(K)}{\mu(K)} > \lambda.$$

Natomiast dla każdego $y \in K$, mamy

$$\mathcal{M}'_\mu(\nu)(y) > \frac{\nu(K)}{\mu(K)} > \lambda,$$

więc $K \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}'_\mu(\nu)(x) > \lambda\}$.

To oznacza, że $\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}'_\mu(\nu)(x) > \lambda\}$ jest zbiorem otwartym, czyli funkcja $\mathcal{M}'_\mu(\nu)$ jest półciągłą z dołu.

■

3.3 Twierdzenie o funkcji maksymalnej dla miary podwajającej

Podobnie jak wcześniej, przez μ mamy oczywiście na myśli miarę podwajającą. Wtedy, istnieje stała $C(n, \mu) > 0$ zależna od wymiaru przestrzeni oraz od stałej z warunku podwajania dla μ , taka że jeżeli f jest bezwzględnie całkowalna względem μ , to dla dowolnego $\lambda > 0$

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}'_\mu(f)(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f| d\mu. \quad (3.4)$$

Dowód:

Zaczynamy od zdefiniowania trzech kluczowych dla dowodu pojęć:

$$A'_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}'_\mu(f)(x) > \lambda\}, \quad (3.5)$$

$$\mathcal{M}'^m_\mu(\nu)(x) = \sup_{\substack{x \in K \\ r_K \leq m}} \frac{\nu(K)}{\mu(K)}, \quad (3.6)$$

$$A'_\lambda{}^m = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}'^m_\mu(f)(x) > \lambda\}, \quad (3.7)$$

gdzie r_K to promień kuli K . Wtedy, $A'_\lambda = \bigcup_{m=1}^{\infty} A'_\lambda{}^m$.

Teraz, ustalamy pewne m . Dla każdego $x \in A'_\lambda{}^m$ istnieje kula K_x , dla której $x \in K_x$ oraz $r_{K_x} \leq m$, taka że

$$\frac{1}{\mu(K_x)} \int_{K_x} |f| d\mu > \lambda. \quad (3.8)$$

Na mocy lematu 4.1.3, z tego, że $K \subset A'_\lambda{}^m$ wiemy, że $\mathcal{M}'_\mu(f)$ jest borelowska.

Niech $\mathcal{B} = \{K_x\}_{x \in A'_\lambda{}^m}$. Z twierdzenia Vitaliego o pokryciu wiemy, że istnieje podzbiór centrów $\mathcal{C} \subset A'_\lambda{}^m$, parami rozłączny z $\{K_{x_j}\}_{x_j \in \mathcal{C}} \subset \mathcal{B}$ spełniający

$$A'_\lambda{}^m \subset \bigcup_{x_j \in \mathcal{C}} 5K_{x_j}. \quad (3.9)$$

Podsumowując dotychczasowe spostrzeżenia otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mu(A'_\lambda{}^m) &\leq \sum_{x_j \in \mathcal{C}} \mu(5K_{x_j}) \leq C^3 \sum_{x_j \in \mathcal{C}} \mu(K_{x_j}) \leq \frac{C^3}{\lambda} \sum_{x_j \in \mathcal{C}} \int_{K_{x_j}} |f| d\mu = \\ &= \frac{C^3}{\lambda} \int_{\bigcup_{x_j \in \mathcal{C}} K_{x_j}} |f| d\mu \leq \frac{C^3}{\lambda} \int_{A'_\lambda{}^m} |f| d\mu \leq \frac{C^3}{\lambda} \int_{A'_\lambda} |f| d\mu. \end{aligned}$$

$A'_\lambda{}^m$ jest rosnącym ciągiem zbiorów. Dokonując przejścia granicznego z $m \rightarrow \infty$, otrzymujemy tezę twierdzenia. ■

3.4 Zastosowanie twierdzenia o funkcji maksymalnej

Do dowodu różniczkowości prawie wszędzie można podejść na dwa sposoby. Pierwszy to przeprowadzenie go na podstawie pojęć funkcji o skończonym wahaniu, monotoniczności funkcji oraz absolutnej ciągłości funkcji. Druga metoda wykorzystuje tzw. funkcje maksymalne, czyli bardziej z perspektywy analizy harmonicznej. Przedstawiony zostanie szkic tego drugiego sposobu. Twierdzenie o funkcji maksymalnej istotnie korzysta z twierdzenia Vitaliego o pokryciu.

Definicja 3.3

Jeśli $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, czyli jest całkowalna na przestrzeni $\mathbb{R}^n$ względem n -wymiarowej miary Lebesgue'a, to dowolny $x \in \mathbb{R}^n$ taki, że

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(K_r)} \int_{K(x,r)} |f(y) - f(x)| d\mu(y) = 0, \quad (3.10)$$

nazywamy punktem Lebesgue'a dla f .

3.4.1 Twierdzenie pomocnicze

Dla każdego $1 \leq p < \infty$, przestrzeń $C_c(\mathbb{R}^n)$ jest gęsta w przestrzeni $L^p(\mu)$. Przez $C_c(\mathbb{R}^n)$ mamy na myśli przestrzeń funkcji ciągłych o nośnikach zwartych na przestrzeniach $L^p(\mu)$.

3.4.2 Twierdzenie o punktach Lebesgue'a

Jeśli $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, to prawie każdy $x \in \mathbb{R}^n$ jest punktem Lebesgue'a dla f .

Szkic dowodu:

Definiujemy

$$(T_r f)(x) = \frac{1}{\mu(K_r)} \int_{K(x,r)} |f(y) - f(x)| d\mu(y), \quad (3.11)$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$ i $r > 0$. Dokonując przejścia granicznego mamy

$$(Tf)(x) = \limsup_{r \rightarrow 0} (T_r f)(x). \quad (3.12)$$

Chcemy udowodnić, że $Tf(x) = 0$ prawie wszędzie, dla prawie każdego $x \in \mathbb{R}^n$.

Dla dowolnego $\delta > 0$, musimy pokazać, że $\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : Tf(x) > 2\delta\}) = 0$.

Wybieramy dowolne $\varepsilon > 0$. Z pomocniczego twierdzenia wiemy, że dla dowolnie zadanego $\varepsilon > 0$ istnieje $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$, takie że $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. Dla ułatwienia wprowadzamy oznaczenie $h = f - g$.

Dla funkcji ciągłej g , wiemy, że $T_r g$ jest pusty, więc miary 0. Mamy $T_r f = T_r h$ i miarę tego ostatniego szacujemy

$$(T_r h)(x) \leq \frac{1}{\mu(K_r)} \int_{K(x,r)} |h(y)| d\mu(y) + |h(x)| \quad (3.13)$$

to wtedy

$$Th \leq \mathcal{M}_\mu(h) + |h(x)|. \quad (3.14)$$

W konsekwencji, jeśli

$$F_\delta = \{x : \mathcal{M}_\mu(h)(x) > \frac{\delta}{2}\} \text{ oraz } G_\delta = \{x : |h(x)| > \frac{\delta}{2}\},$$

wtedy $\{x \in \mathbb{R}^n : Tf(x) > 2\delta\} \subset (F_\delta \cup G_\delta)$.

Z nierówności Czebyszewa oraz własności funkcji maksymalnej, szacujemy miary tych zbiorów, $\mu(G_\delta) \leq \frac{1}{\delta} \|h\|_1$ oraz ze słabego oszacowania dla funkcji maksymalnej $\mu(F_\delta) \leq \frac{C}{\delta} \|h\|_1$. C jest stałą z twierdzenie 3.3. Funkcja g była dobrana tak aby $\|f - g\| < \varepsilon$, gdzie $h = f - g$. Wnioskujemy, więc że

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : Tf(x) > 2\delta\}) \leq \frac{C}{\delta} + \frac{1}{\delta} \varepsilon.$$

Skoro wybraliśmy ε dowolnie małe otrzymujemy $Tf = 0$, co kończy dowód. ■

Gdy $n = 1$, to twierdzenia daje istnienie prawie wszędzie tzw. pochodnej symetrycznej z funkcji $\Phi(x) := \int_a^x f(t)dt$, gdy $f \in L^1[a, b]$. 1-wymiarowym odpowiednikiem kuli jest tu przedział $[x - r, x + r]$, a średnia całkowa z f po tym przedziale, to dokładnie $\frac{\Phi(x+r) - \Phi(x-r)}{2r}$. Granicą przy $r \rightarrow 0$ jest właśnie tak zwana pochodna symetryczna z f . Biorąc kule zawierające x , ale niekoniecznie o środku w x , mamy do dyspozycji przedziały $[x, x + r]$, co daje zwykle pochodne. Funkcja maksymalna niescentrowana przedstawiona w definicji 4.2 daje właśnie takie oszacowania.

Definicja 3.4

Funkcja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest absolutnie ciągła, jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że $\sum_i |f(d_i) - f(c_i)| < \varepsilon$ dla każdej rozłącznej rodziny przedziałów $(c_i, d_i) \subset [a, b]$ o łącznej długości $\sum_i |d_i - c_i| < \delta$. Rodziny przedziałów mogą być zarówno skończone jak i przeliczalne.

3.5 Lemat o funkcji absolutnie ciągłej

Jeśli funkcja absolutnie ciągła $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ma pochodną f' równą zero prawie wszędzie, to funkcja ta jest stała.

Dowód:

Ustalamy punkt $c \in [a, b]$. Naszym celem jest udowodnienie, że $f(c) = f(a)$ co z dowolności wyboru c pokaże, że rozważana funkcja jest stała na całym przedziale.

Istnieje $\delta > 0$, taka że

$$\sum_{i=1}^n |f(y_i) - f(x_i)| < \varepsilon$$

dla każdego skończonego zbioru parami rozłącznych pod przedziałów $\{[x_i, y_i] \subset [a, b] : i = 1, \dots, n\}$ takich, że

$$\sum_{i=1}^n (y_i - x_i) < \delta.$$

Wiemy to z założenia o absolutnej ciągłości funkcji f .

Definiujemy zbiór $A := \{x \in [a, c] : f'(x) = 0\}$. Jest to zbiór pełnej miary, wynika to wprost z założeń lematu. Każdemu $x \in A$ odpowiada pewien przedział $[a_x, c_x] \subset [a, c]$ o dowolnie małej długości taki, że $x \in [a_x, c_x]$ oraz $|f(c_x) - f(a_x)| \leq \varepsilon(c_x - a_x)$.

Wtedy zbiór $\{[a_x, c_x] : x \in A\}$ jest pokryciem zbioru A w sensie Vitaliego. Właśnie w tym momencie dowodu stosujemy twierdzenie Vitaliego. Z twierdzenia Vitaliego o pokryciu wiemy, że istnieje podzbiór $\{[a_i, c_i] : i = 1, \dots, n\}$ parami rozłącznych przedziałów takich, że

$$\mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^n [a_i, c_i]) < \delta.$$

Skoro $\mu([a, c] \setminus A) = 0$, to mamy

$$\mu([a, c] \setminus \bigcup_{i=1}^n [a_i, c_i]) < \delta.$$

Bez straty ogólności zakładamy, że

$$a = c_0 \leq a_1 \leq c_1 \leq a_2 \leq c_2 \leq \dots \leq a_n \leq c_n \leq a_{n+1} = c.$$

Niech $(x_1, y_1) := (c_0, a_1)$, $(x_2, y_2) := (c_1, a_2), \dots, (x_{n+1}, y_{n+1}) := (c_n, a_{n+1})$.

Wtedy

$$\sum_{i=1}^{n+1} (y_i - x_i) = \mu([a, c] \setminus \bigcup_{i=1}^n [a_i, c_i]) < \delta.$$

Co z kolei implikuje

$$|f(c) - f(a)| \leq \sum_{i=1}^{n+1} |f(y_i) - f(x_i)| + \sum_{i=1}^n |f(c_i) - f(a_i)| \leq \varepsilon + \sum_{i=1}^n \varepsilon(c_i - a_i) \leq \varepsilon(1 + c - 1).$$

Przechodząc do granicy, $\varepsilon \rightarrow 0$ otrzymujemy tezę lematu. ■

3.6 Zastosowanie

Lemat oraz jego dowód został wyszczególniony w tej pracy, ponieważ jest bardzo przydatny w dowodzie uogólnienia wzoru Newtona-Leibniza dla f absolutnie ciągłej. Dla $\Phi(x) = \int_a^x f'(t)dt$ z twierdzenia 3.4.2 o punktach Lebesgue'a wynika, że $\Phi' = f'$ prawie wszędzie, a skoro Φ jest absolutnie ciągła, to $f - \Phi$ jest stała, z czego wynika równanie $f(x) = \Phi(x) + C$. To dla $x = a$ daje $\Phi(a) = 0$ oraz znajomy wzór $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt$, jak wiadomo mający wielkie znaczenie dla analizy matematycznej.

Bibliografia

- [1] Stanisław Łojasiewicz, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*, PWN, Warszawa, 1976
- [2] D. H. Fremlin, *Measure Theory, vol. 2*, University of Essex, Essex, 2010
- [3] Pascal Auscher, *Harmonic Analysis*, The Australian National University, 2010
- [4] Brian S. Thomson, *Real Analysis Exchange Vol. 29*, Simon Fraser University, 2003/2004
- [5] Walter Rudin, *Real and Complex Analysis*, University of Wisconsin-Madison, 1966
- [6] Elias M. Stein, Rami Shakarchi *REAL ANALYSIS Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces*,