



Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica
w Krakowie

Praca licencjacka

Miara Hausdorffa

Baltazar Augustynek

Kierunek: Matematyka

Nr albumu: 405617

Promotor
Dr hab. Krzysztof Rudol



Wydział Matematyki Stosowanej

Kraków 2022

Spis treści

1	Wiadomości wstępne	2
2	Miara Hausdorffa	6
3	Wymiar Hausdorffa zbioru	11
4	Własności Miary Hausdorffa	14
5	Miara Hausdorffa zbioru Cantora	17

Wstęp

Ta praca licencjacka poświęcona jest mierze Hausdorffa, istotnemu narzędziu matematycznemu w analizie przestrzeni metrycznych i geometrii fraktalnej. Miara ta znajduje zastosowanie w różnych dziedzinach, takich jak topologia, analiza obrazu czy geografia. Celem pracy jest zaprezentowanie definicji miary Hausdorffa oraz jej najważniejszych własności.

Praca składa się z pięciu rozdziałów. W rozdziale pierwszym wprowadzamy podstawowe pojęcia, takie jak definicja sigma-ciała, miary czy topologii, które stanowią podstawę rozważań związanych z tym tematem. Omawiamy również koncepcje związane z przestrzeniami metrycznymi oraz zbiorami domkniętymi i otwartymi.

Rozdział drugi poświęcony jest definicji miary Hausdorffa oraz jej intuicyjnego znaczenia. Omówimy w nim również jedno z najważniejszych twierdzeń dotyczących tej miary.

W trzecim rozdziale skupiamy się na analizie wymiaru Hausdorffa. Definiujemy wymiar Hausdorffa zbioru oraz omawiamy jego najważniejsze własności.

Rozdział czwarty poświęcony jest analizie własności miary Hausdorffa. Skupiamy się na charakterystycznych cechach tej miary, takich jak niezmienniczość względem przekształceń i jednorodność s -tego stopnia. Omawiamy również związek miary Hausdorffa z miarą liczącą.

W piątym rozdziale skupimy się na analizie wymiaru Hausdorffa zbioru Cantora. Przedstawiamy definicję zbioru Cantora oraz przeprowadzamy obliczenia dotyczące jego wymiaru.

1 Wiadomości wstępne

Ten rozdział poświęcimy na przytoczenie i omówienie podstawowych definicji, które przydadzą się nam w późniejszej części pracy.

Na początku warto zaznaczyć, że w całej pracy przyjmujemy że zbiór przeliczalny to zbiór równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych.

Definicja 1.1 W przestrzeni euklidesowej (X, d) średnicę zbioru C nazywamy

$$\text{diam}(C) = \sup\{d(x, y); x, y \in C\}. \quad (1.1)$$

Definicja 1.2 (przestrzeń topologiczna) Zbiór X z rodziną τ podzbiorów X spełniającą następujące warunki:

1. Zbiór X oraz zbiór pusty należy do τ
 $X \in \tau, \emptyset \in \tau$
2. Część wspólna dowolnych dwóch zbiorów należących do τ także należy do τ
 $\forall A, B \in \tau: A \cap B \in \tau$

3. Suma dowolnej, nawet nieprzeliczalnej liczby zbiorów należących do τ także należy do τ

nazywamy przestrzenią topologiczną, a samo τ nazywamy topologią. Każdy zbiór należący do rodziny τ będziemy nazywać zbiorem otwartym natomiast zbiorem domkniętym nazywamy zbiór którego dopełnienie jest zbiorem otwartym.

Definicja 1.3

Topologia euklidesowa generowana jest przez rodzinę kul względem metryki euklidesowej.

Definicja 1.4 Pokryciem zbioru Y zawartego w przestrzeni X nazywamy rodzinę zbiorów $(U_s)_{s \in S}$ taką, że Y jest zawarty w sumie elementów tej rodziny to znaczy $Y \subset (U_s)_{s \in S}$.

Definicja 1.5 Niech X będzie ustalona przestrzenią. Rodzinę $\mathcal{F}$ zbiorów z X nazywamy σ -ciałem tej przestrzeni jeżeli:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. $\forall A \in \mathcal{F} \implies X \setminus A \in \mathcal{F}$
3. $\forall A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N}$

Pierwszy warunek oznacza, że zbiór pusty należy do $\mathcal{F}$. Drugi warunek oznacza, że dopełnienie każdego zbioru należącego do $\mathcal{F}$ również należy do $\mathcal{F}$, a trzeci warunek oznacza, że przeliczalna suma zbiorów należących do $\mathcal{F}$ też należy do $\mathcal{F}$.

Definicja 1.6

Zbiór borelowski jest to najmniejsze σ -ciało zawierające wszystkie zbiory otwarte.

Zbiorami mierzalnymi będziemy nazywać wszystkie zbiory należące do danego σ -ciała (sigma-ciała).

Definicja 1.7 Niech X będzie przestrzenią, zbiory $A_1, A_2, \dots \in X$ tworzą rodzinę parami rozłącznych zbiorów w X gdy:

$$\forall i \quad \forall j \neq i : \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad ; \quad i, j \in \mathbb{Z}$$

Oznacza to nic innego jak to, że dla dowolnych dwóch zbiorów ich część wspólna jest pusta.

Następnie zdefiniujemy miarę jako funkcję w przestrzeni mierzalnej to znaczy na parze $(\Omega, \mathcal{F})$ gdzie Ω to przestrzeń, a $\mathcal{F}$ to sigma ciało określone na Ω .

Definicja 1.8 (definicja miary) Niech $\mathcal{F}$ będzie sigma ciałem określonym na przestrzeni Ω .

Funkcje $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0; \infty]$ nazywamy miarą gdy spełnione są następujące warunki:

1. $\mu(\emptyset) = 0$

2. $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) ;$

jeżeli zbiory $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ są parami rozłączne.

Definicja 1.9 Miara zewnętrzna na zbiorze Ω , to funkcja nieujemna $\mu^* : 2^\Omega \rightarrow [0, +\infty]$ taka, że:

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$

2. monotoniczna: $A \subset B \subset \Omega \Rightarrow \mu(B) \geq \mu(A)$ (czyli monotoniczna)

3. przeliczalnie subaddytywna: $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

Definicja 1.10 Niech $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ będzie miarą na Ω . Mówimy, że μ jest:

1. probabilistyczna, gdy $\mu(\Omega) = 1$

2. μ jest σ -skończona, (odp. skończona), gdy istnieją zbiory $\Omega_n \in \mathcal{F}$ takie, że $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ oraz $\mu(\Omega_n) < \infty$ (odpowiednio, gdy $\mu(\Omega) < \infty$)

3. *Miarą liczącą nazywamy taką miarę, że $\forall x \in \Omega \quad \mu(\{x\}) = 1$. Czyli gdy μ podaje ilość elementów zbioru $A \subset \Omega$ w przypadku zbiorów skończonych, zaś ma wartość $+\infty$ w przeciwnym przypadku*

Teraz zdefiniujemy bardzo istotną własność miary jaką jest ciągłość miary z góry i z dołu.

Własność 1.1 *Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą, gdzie $\mathcal{F}$ to sigma-ciało określone na Ω i $A_1, A_2, .. \in \mathcal{F}$ będzie ciągiem elementów w $\mathcal{F}$ wtedy:*

1. *gdy dla każdego $i \in \mathbb{N}$ zachodzi $A_i \subseteq A_{i+1}$, to*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i)$$

2. *gdy dla każdego $i \in \mathbb{N}$ zachodzi $A_{i+1} \subseteq A_i$ oraz $\mu(A_1) < \infty$, to*

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i)$$

Własność 1. nazywamy ciągłością z dołu, a własność 2. ciągłością z góry danej miary.

2 Miara Hausdorffa

W tym rozdziale zajmiemy się konstrukcją miary Hausdorffa i zbadaniem jej podstawowych własności.

Zacznijmy od konstrukcji miar zewnętrznych $\mathcal{H}_\delta^s$, gdzie $0 < \delta \leq +\infty$, by następnie zastosować konstrukcję Caratheodory'ego dla miary zewnętrznej $\mathcal{H}^s := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^s$, aby wyodrębnić zbiory mierzalne. W tym przypadku będą to między innymi wszystkie zbiory borelowskie.

W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ niech $d(P, Q)$ oznacza odległość euklidesową punktów P, Q , zaś $\text{diam}(C)^s$ -średnicę zbioru $C \subset \mathbb{R}^n$ podniesioną do s -tej potęgi, czyli kres górny wartości $d(P, Q)$, gdzie $P, Q \in C$. Odległość zbiorów $A, B \subset \mathbb{R}^n$ definiujemy jako:

$$d(A, B) := \inf\{d(P, Q) : P \in A, Q \in B\}.$$

Gdy $A = \{P\}$, to zamiast $d(\{P\}, B)$ będziemy pisać $d(P, B)$, lub $\text{dist}(P, B)$.

Niech $0 \leq s \leq \infty$ oraz $A \subset \mathbb{R}^n$. Dla każdej δ takiej, że $0 < \delta \leq \infty$, zdefiniujemy:

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) = \inf \left\{ \sum_j \text{diam}(C_j)^s : A \subset \bigcup_j C_j, \text{diam}(C_j) < \delta, C_j \in \mathbb{R}^n \right\} \quad (2.1)$$

Konstrukcja tej funkcji to tak naprawdę znalezienie wszystkich pokryć zbioru A zbiorami, których średnice są silnie mniejsze niż δ oraz wzięcie infimum (największa z minorant) z sumy podniesionych do s -tej potęgi średnic zbiorów pokrywających.

Definicja 2.1 *s -wymiarową miarę Hausdorffa definiujemy jako:*

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^s(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(A)$$

zatem intuicja podpowiada nam, że bierzemy pokrycie zbioru A zbiorami o średnicach bardzo małych.

Aby zbadać najistotniejsze własności miary Hausdorffa będziemy potrzebowali twierdzenia o regularności wewnętrznej miary.

Twierdzenie 2.1 *Jeżeli $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą, w której zbiory ograniczone mają miarę skończoną, to miara μ jest regularna. Czyli każdy zbiór borelowski A spełnia warunek:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists F, G : F \subset A \subset G, \mu(G \setminus F) < \varepsilon, \text{ gdzie } F - \text{domknięty, } G - \text{otwarty} \quad (2.2)$$

Dowód. Dowód polega na wykazaniu dwóch własności:

1. Rodzina $\mathcal{M}$ zbiorów A spełniających ten warunek 2.2 zawiera wszystkie zbiory domknięte.
2. Rodzina $\mathcal{M}$ jest σ -algebrą.

Wykażemy to dla miar skończonych.
Wtedy dla $A = F$ zbiory:

$$G_k := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, F) < \frac{1}{k}\}$$

są otwarte, stanowią ciąg malejący, o przecięciu równym F . Ciąg zbiorów $G_k \setminus F$ maleje do zbioru pustego i z ciągłości miary, $\mu(G_k \setminus F)$ zmierza do zera. Zatem dla dowolnego ε dobierzemy dostatecznie duże k takie, że $\mu(G_k \setminus F) < \varepsilon$. To dowodzi własności 1.

Aby udowodnić warunek 2 musimy udowodnić wszystkie 3 warunki z definicji 1.5:

1. Zbiór pusty i Ω są otwarto-domknięte, więc F i G równe A w tym przypadku spełniają warunek.
2. Dopełnienie zbioru A spełniającego 2.2 też spełnia 2.2; mając F, G dobrane dla A , tworzymy ich dopełnienia:

$$(\Omega \setminus G) \subset (\Omega \setminus A) \subset (\Omega \setminus F)$$

Różnica skrajnych zbiorów jest taka sama jak $(G \setminus A)$, więc ma miarę mniejszą niż ε . Rodzina $\mathcal{M}$ jest więc zamknięta na dopełnienia.

3. Pozostaje nam udowodnić:

$$\forall_n : A_n \in \mathcal{M} \implies \bigcup_n A_n \in \mathcal{M}$$

Dobieramy dla A_n podzbiory domknięte F_n i nadzbiory otwarte G_n tak, by

$$\mu(G_n \setminus F_n) < \frac{\varepsilon}{2^n} \tag{2.3}$$

Dla $F_0 := \bigcup_n F_n$, $G := \bigcup_n G_n$ mamy

$$G \setminus F_0 \subset \bigcup_n (G_n \setminus F_n)$$

Dzięki przeliczalnej subaddytywności odnosząc się do 2.3 dostajemy

$$\mu(G \setminus F_0) < \varepsilon$$

tyle, że F_0 nie musi być domknięty. Dzięki ciągłości miary μ , F_0 można zastąpić przez jego domknięty podzbiór $F := F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_k$ dla k dostatecznie dużego, co daje nam

$$\mu(G \setminus F) < 2\varepsilon$$

co z dowolności ε kończy dowód. ■

Twierdzenie 2.2

Dodatkowo w przestrzeni $\mathbb{R}^d$ można uzyskać zwartość takiego F .

Dowód. Rzeczywiście, domknięte podzbiory ograniczone są tu zwarte, zbiór F jest więc sumą ciągu rosnącego zbiorów zwartych

$$F_n := F \cap \{x : \|x\| \leq n\}$$

których miary zmierzają do miary F , zaś ze skończoności miary μ , miary $\mu(G \setminus F_n)$ zmierzają do $\mu(G \setminus F)$ i dla pewnego n są mniejsze niż ε . ■

Twierdzenie 2.3 $\mathcal{H}^s$ jest miarą zewnętrzną, dla której wszystkie zbiory borelowskie są mieralne. Zawężenie jej do tego sigma-ciała jest więc miarą borelowską. Ponadto ta miara zewnętrzna jest regularna zewnętrznie (czyli względem otwartych nadzbiorów):

$$A \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathcal{H}^s(A) = \inf\{\mathcal{H}^s(G) : A \subset G, \text{ } G\text{-otwarty}\}$$

oraz wewnętrznie regularna względem zwartych podzbiorów dowolnego zbioru otwartego $G \subset \mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{H}^s(G) = \sup\left\{\mathcal{H}^s(K) : K \subset G \text{ zwarty}\right\}$$

Ponadto gdy A jest zbiorem mierzalnym i $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, oraz $\varepsilon > 0$, to istnieje zwarty podzbiór $K \subset A$ taki, że $\mathcal{H}^s(A \setminus K) < \varepsilon$.

Dowód. Dla ułatwienia podzielimy ten dowód na 3 etapy.

Etap 1.

Udowodnimy, że $\mathcal{H}_\delta^s$ i $\mathcal{H}^s$ to miary zewnętrzne.

Jak $\emptyset \subset \{x\}$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$ $\text{diam}(\{x\}) = 0$, zatem dla każdej $\delta > 0$

$$\mathcal{H}_\delta^s(\emptyset) = 0$$

skoro zachodzi dla każdej delty to w szczególności

$$\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$$

Następnie weźmy $A \subset \bigcup_j A_j$, chcemy pokazać, że

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^s(A_j) \tag{2.4}$$

Bez straty ogólności przyjmijmy, że $\mathcal{H}_\delta^s(A_j) < \infty$.

Z definicji infimum dla dowolnego, $\varepsilon > 0$ istnieją zbiory C_k^j , spełniające $A_j \subset \bigcup_k (C_k^j)$ i $\text{diam}(C_k^j) < \delta$ takie, że zachodzi nierówność:

$$\mathcal{H}_\delta^s(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \geq \sum_k \text{diam}(C_k^j)$$

zatem

$$\sum_j \mathcal{H}_\delta^s(A_j) + \varepsilon \geq \sum_j \sum_k \text{diam}(C_k^j) = \sum_{j,k} \text{diam}(C_k^j) \geq \mathcal{H}_\delta^s(A)$$

Ostatnia nierówność wynika z faktu, że $A \subset \bigcup_{j,k} C_k^j$

przy $\varepsilon \rightarrow 0$ otrzymujemy nierówność (2.1),

następnie podstawiając $\delta \rightarrow 0^+$ otrzymujemy:

$$\mathcal{H}^s(A) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{H}^s(A_j)$$

Krok 2

Będziemy chcieli udowodnić, że $\mathcal{H}^s$ jest miarą borelowską (czyli, zbiory borelowskie są mierzalne, a zawężenie $\mathcal{H}^s$ do ich σ -ciała jest miarą).

Zatem niech $A, B \subset \mathbb{R}^n$, $d(A, B) = \delta_0 > 0$ chcemy pokazać, że

$$\mathcal{H}^s(A \cup B) = \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B) \quad (2.5)$$

oczywiście z przeliczalnej subaddytywności zachodzi

$$\mathcal{H}^s(A \cup B) \leq \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$$

zatem zostaje udowodnić nierówność w drugą stronę.

Niech C_j będzie rodziną zbiorów pokrywających $A \cup B$ ze średnicami $\text{diam}(C_j) < \delta < \frac{\delta_0}{4}$.

Każde C_j może przeciąć A lub B ale nie może przeciąć obu na raz, ponieważ średnica C_j jest mniejsza niż odległość między tymi zbiorami ($\delta < \frac{\delta_0}{4}$). Zatem rodzinę C_j można podzielić na dwie klasy C'_j oraz C''_j takie, że $A \subset \bigcup_j C'_j$ i $B \subset \bigcup_j C''_j$. Wtedy

$$\sum_j \text{diam}(C_j)^s = \sum_j \text{diam}(C'_j)^s + \sum_j \text{diam}(C''_j)^s \geq \mathcal{H}_\delta^s(A) + \mathcal{H}_\delta^s(B) \quad (2.6)$$

Ostatnia nierówność wynika z 2.1, gdyż $\mathcal{H}_\delta^s$ to jest infimum tych sum.

Biorąc infimum po wszystkich C_j , wnioskujemy, że dla każdej $\delta \in (0; \frac{\delta_0}{4})$

$$\mathcal{H}_\delta^s(A \cup B) \geq \mathcal{H}_\delta^s(A) + \mathcal{H}_\delta^s(B) \quad (2.7)$$

Przyjmując $\delta \rightarrow 0^+$ otrzymujemy równość 2.5.

Krok 3

Udowodnimy zewnętrzną regularność. Wynika ona stąd, że gdy dla zbioru $E \subset \mathbb{R}^n$ oraz dla $\varepsilon > 0$ zdefiniujemy otoczkę:

$$E^\varepsilon := \{P \in \mathbb{R}^n : d(P, E) < \varepsilon\}.$$

Ponieważ z nierówności trójkąta łatwo wynika ciągłość $d(P, E)$, jako funkcji zmiennej P (spełnia ona warunek Lipschitza za stałą 1), więc zbiory E^ε są otwarte. Również z nierówności trójkąta ich średnica jest nie większa, niż $\text{diam}(E) + 2\varepsilon$. Z ciągłości

funkcji $[0, M] \ni t \mapsto t^s$ wynika, że dla dostatecznie małych ε również różnica między średnicami zbiorów podniesionych do s -tej potęgi C oraz C^ε będzie dowolnie mała.

W przypadku, gdy $\mathcal{H}^s(A) = +\infty$, za G można wziąć dowolny otwarty nadzbiór zbioru A . W przeciwnym przypadku $\mathcal{H}^s(A)$ dla $\delta > 0$ dostatecznie małego różni się od $\mathcal{H}_\delta^s(A)$ o mniej, niż $\frac{1}{2k}$. Dla pewnych zbiorów C_j o średnicach mierniejszych niż δ , pokrywających A zachodzi:

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) + \frac{1}{2k} \geq \sum_j (\text{diam}(C_j))^s$$

Przy dostatecznie małym $\varepsilon_j > 0$ będzie $(\text{diam}(C_j^{\varepsilon_j}))^s \leq (\text{diam}(C_j))^s + \frac{1}{k2^j}$, suma ostatnich ułamków nie przekroczy $\frac{1}{k}$. Wówczas:

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) + \frac{2}{k} \geq \sum_j (\text{diam}(C_j^{\varepsilon_j}))^s$$

Wtedy dla zbioru otwartego $G_k := \bigcup_j C_j^{\varepsilon_j}$ zawierającego A , mamy następujący ciąg nierówności:

$$\mathcal{H}^s(A) \geq \mathcal{H}_\delta^s(A) \geq \mathcal{H}_{2\delta}^s(G_k) - \frac{2}{k} \geq \mathcal{H}_{2\delta}^s(B) - \frac{2}{k}$$

gdzie $B := \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$. Biorąc granice przy $\delta \rightarrow 0^+$, $k \rightarrow \infty$, otrzymamy $\mathcal{H}^s(A) \geq$

$\mathcal{H}^s(B)$. Ciąg malejący zbiorów otwartych $\bigcap_{k=1}^n G_k$ o miarach skończonych ma przecięcie G , więc z ciągłości miary, dla $n \rightarrow \infty$ miary $\mathcal{H}^s(\bigcap_{k=1}^n G_k)$ przybliżają miarę

$\mathcal{H}^s(B) = \mathcal{H}^s(A)$. Ponadto zbiory $\bigcap_{k=1}^n G_k$ są otwarte i zawierają zbiór A , co kończy dowód zewnętrznej regularności.

Z ciągłości miar od dołu, ponieważ "wewnętrzne otoczki"

$K_j = \{x \in G : \text{dist}(x, G^c) \geq 1/j, |x| \leq j\}$ są zbiorami zawartymi w G i rosną gdy $j \rightarrow \infty$, o sumie równej G , wynika stąd wewnętrzna regularność na zbiorach otwartych G .

Gdy A jest borelowski, o mierze skończonej, możemy rozważyć zawężenie miary $\mathcal{H}^s$ do tego zbioru, czyli miarę $\mu(E) := \mathcal{H}^s(A \cap E)$, która jest już skończoną miarą borelowską w $\mathbb{R}^n$ i dla niej zastosować twierdzenie o regularności wewnętrznej tego typu miar. ■

3 Wymiar Hausdorffa zbioru

W tym rozdziale zajmiemy się konstrukcją wymiaru Hausdorffa. Lecz zanim to zrobimy, musimy udowodnić trzy twierdzenia niezbędne do wytłumaczenia czym jest ów wymiar. Pamiętajmy, że wciąż będziemy w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ ze zwykłą metryką euklidesową.

Twierdzenie 3.1 *Weźmy dowolny zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$, szczególną uwagę zwróćmy na n czyli wymiar przestrzeni, w której się poruszamy.*

$$\forall s > n \quad \mathcal{H}^s(A) = 0$$

Dowód. Weźmy kostkę jednostkową (kostka o boku 1) $Q \subset \mathbb{R}^n$ o wymiarze n . Kostkę tą możemy podzielić na podkostki Q_j o bokach równych $\frac{1}{k}$, gdzie $k \in \mathbb{R}$. Istnieje k^n takich małych kostek o średnicach $\frac{\sqrt{n}}{k}$. Pamiętajmy, że $s > n$ suma średnic tych kostek podniesiona do s -tej potęgi jest równa:

$$\sum_j \text{diam}(Q_j)^s = k^n \left(\frac{\sqrt{n}}{k} \right)^s = (\sqrt{n})^s \frac{1}{k^{s-n}}$$

Zatem teraz możemy oszacować funkcję (2.1) przy pomocy, której skonstruowaliśmy miarę Hausdorffa w sposób następujący:

$$0 \leq \mathcal{H}_{\frac{\sqrt{n}}{k}}^s(Q) \leq \sum_j \text{diam}(Q_j)^s = (\sqrt{n})^s \frac{1}{k^{s-n}}$$

Pierwsza nierówność wynika z definicji miary zewnętrznej jako funkcji o nieujemnych wartościach ($\mathcal{H}_{\frac{\sqrt{n}}{k}}^s$ jest miarą zewnętrzną patrz etap 1 dowodu twierdzenia 2.3), a druga nierówność wynika z definicji infimum.

Przy $k \rightarrow \infty$ nasza funkcja pomocnicza $\mathcal{H}_{\frac{\sqrt{n}}{k}}^s(Q)$ zamienia się na miarę Hausdorffa $\mathcal{H}^s$, a nasza suma średnic równa $(\sqrt{n})^s \frac{1}{k^{s-n}}$ dąży do 0 (bo $s - n \geq 0$). Zatem z twierdzenia o 3 ciągach

$$0 \leq \mathcal{H}^s(Q) \leq 0 \implies \mathcal{H}^s(Q) = 0$$

Udowodniliśmy, w takim razie że dla każdego s większego niż wymiar przestrzeni miara Hausdorffa kostki jednostkowej jest równa 0. Całą przestrzeń $\mathbb{R}^n$ możemy "wypełnić" przeliczalną ilością takich kostek to znaczy oznaczając K_i kostkę jednostkową mamy:

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_i K_i$$

Co z przeliczalnej addytywności miary (1.8 podpunkt 2.) $\mathcal{H}^s$ oznacza, że:

$$\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n) = 0 \quad \forall s > n$$

Ostatnia równość kończy dowód ponieważ z definicji miary (1.8) wiemy, że jest monotoniczna co daje nam tezę dla każdego $A \subset \mathbb{R}^n$.

■

Teraz odmówimy i udowodnimy kluczowe twierdzenie do zdefiniowania wymiaru Hausdorffa zbioru.

Twierdzenie 3.2 Weźmy dowolny zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$, taki że $\mathcal{H}^s(A) < \infty$ dla pewnego $s \in [0; \infty)$ wtedy:

$$\forall t > s \quad \mathcal{H}^t(A) = 0$$

Aby udowodnić to twierdzenie na początku zrobimy przygotowanie, a później przejdziemy do meritum tego dowodu.

Dowód. Ponieważ $\mathcal{H}^s(A)$ jest skończony dla każdej $\delta > 0$, to istnieje przeliczalne pokrycie zbioru A zbiorami o średnicach mniejszych niż δ . To pokrycie oznaczmy $\{C_j\}$. Wprowadzając matematyczne oznaczenia mamy $A \subset \bigcup_j C_j$, gdzie $\text{diam}(C_j) < \delta$, dla każdego $j \in \mathbb{N}$. Korzystając z definicji infimum mamy następująca nierówność:

$$\sum_j \text{diam}(C_j)^s \leq \mathcal{H}^s(A) + 1 \quad (3.1)$$

Teraz rozpisując średnice pojedynczego zbioru C_j poniesioną do s -tej potęgi mamy:

$$\text{diam}(C_j)^s = \text{diam}(C_j)^t \text{diam}(C_j)^{s-t} \geq \text{diam}(C_j)^t \delta^{s-t}$$

Ostatnia nierówność wynika z tego, że $\text{diam}(C_j) < \delta$ i $s - t < 0$.

Dzieląc obie strony ostatniej nierówności przez $\text{diam}(C_j)^t$ i potęgując do potęgi -1 otrzymujemy:

$$\text{diam}(C_j)^{t-s} \leq \delta^{t-s} \quad (3.2)$$

Następnie rozpisując z własności potęg i korzystając z nierówności 3.2 mamy oszacowanie:

$$\sum_j \text{diam}(C_j)^t = \sum_j \text{diam}(C_j)^{t-s} \text{diam}(C_j)^s \leq \sum_j \delta^{t-s} \text{diam}(C_j)^s = \delta^{t-s} \sum_j \text{diam}(C_j)^s \quad (3.3)$$

Przechodząc do meritum tego dowodu weźmy następujący ciąg nierówności:

$$\mathcal{H}_\delta^t(A) \leq \sum_j \text{diam}(C_j)^t = \sum_j \text{diam}(C_j)^s \text{diam}(C_j)^{t-s} \leq \quad (3.4)$$

$$\leq \delta^{t-s} \sum_j \text{diam}(C_j)^s \leq \quad (3.5)$$

$$\leq \delta^{t-s} (\mathcal{H}^s(A) + 1) \quad (3.6)$$

Pierwsza nierówność wynika wprost z definicji infimum, zaś nierówność z wzoru 3.4 do 3.5 wynika z nierówności 3.3. Analizując dalej ten ciąg nierówności przejście z wzoru 3.5 do 3.6 jest konsekwencją nierówności 3.1. Biorąc skrajne wyrażenia to znaczy

$$\mathcal{H}_\delta^t(A) \leq \delta^{t-s} (\mathcal{H}^s(A) + 1)$$

przy $\delta \rightarrow 0^+$ otrzymujemy

$$\mathcal{H}^t(A) = 0$$

co kończy dowód. ■

Twierdzenie 3.3 Weźmy dowolny zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$, taki że $\mathcal{H}^s(A) \in (0; \infty]$ dla pewnego $s \in [0; \infty)$ wtedy:

$$\forall t < s : \mathcal{H}^t(A) = \infty$$

Tego twierdzenia nie będziemy udowadniać ponieważ wynika ono z twierdzenia 3.2. Dokładniej, jest ono kontrapozycją twierdzenia 3.2

Mając wszystkie 3 twierdzenia udowodnione w tym rozdziale można zdefiniować wymiar Hausdorffa zbioru.

Z twierdzenia 3.1 wiemy że dla każdego zbioru $A \subset \mathbb{R}^n$ dla każdego $s > n$ miara Hausdorffa zbioru A jest równa 0 ($\mathcal{H}^s(A) = 0$). Przechodząc s -em po liczbach od 0 do n natrafimy na takie s_0 , że

$$\forall s > s_0 \quad \mathcal{H}^s(A) = 0$$

jednocześnie

$$\forall s < s_0 \quad \mathcal{H}^s(A) = \infty$$

Co wiemy odpowiednio z twierdzeń 3.2 i 3.1. W naturalny sposób punkt ten możemy scharakteryzować jako:

$$s_0 = \inf\{s : \mathcal{H}^s(A) = 0\}$$

I właśnie ten punkt s_0 nazywać będziemy wymiarem Hausdorffa zbioru A .

4 Własności Miary Hausdorffa

W tym rozdziale zajmimy się podstawowymi własnościami miary Hausdorffa. Pierwsze dwa twierdzenia będą oczywiste, jednakże bardzo ważne dlatego je przytoczymy.

Pierwszą z nich nie będzie wymagała nawet formalnego ani technicznego dowodu.

Twierdzenie 4.1

Niech $A \subset \mathbb{R}^n$, T -przesunięcie euklidesowe

$$\mathcal{H}^s(TA) = \mathcal{H}^s(A) \quad (4.1)$$

Jest to oczywista własność, ponieważ widać, we wzorze 2.3 że miara Hausdorffa jest niezmiennicza względem przesunięć, bo średnice zbiorów przesuniętych są takie same, a pokrycie zbioru dla zbioru przesuniętego jest przesuniętym pokryciem.

Następna własność będzie równie prosta i oczywista

Twierdzenie 4.2 Weźmy dowolny zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ oraz $\lambda \in \mathbb{R}$, taką że $\lambda > 0$ wtedy:

$$\mathcal{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A) \quad (4.2)$$

Dowód.

Możemy pokryć zbiór (λA) zbiorami (λC_j) . Pamiętając, że:

$$\sum_j \text{diam}(\lambda C_j)^s = \lambda^s \sum_j \text{diam}(C_j)^s$$

otrzymujemy następujące równości:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^s(\lambda A) &= \inf \left\{ \sum_j \text{diam}(\lambda C_j)^s : \lambda A \in \bigcup_j \lambda C_j, \text{diam}(\lambda C_j) < \lambda \delta, C_j \in \mathbb{R}^n \right\} = \\ &= \inf \left\{ \lambda^s \sum_j \text{diam}(C_j)^s : A \in \bigcup_j C_j, \text{diam}(C_j) < \delta, C_j \in \mathbb{R}^n \right\} = \\ &= \lambda^s \mathcal{H}_\delta^s(A) \end{aligned}$$

przy $\delta \rightarrow 0^+$ wszystkie równości się zachowują co kończy dowód. ■

Przy następnej własności odwołamy się definicji miary liczącej (1.10). Okazuje się że miara Hausdorffa dla $s = 0$ będzie właśnie zachowywać się jak miara licząca. Zatem sformułujmy twierdzenie i przeanalizujmy prosty dowód.

Twierdzenie 4.3

Miara Hausdorffa $\mathcal{H}^s$ dla $s = 0$ jest miarą liczącą w przestrzeni $\mathbb{R}^n$

Dowód. dowód podzielimy na dwa przypadki, pierwszym będzie zbiór o skończonej liczbie elementów, a w drugim przypadku będziemy rozważać zbiory o nieskończonej liczbie elementów.

1. Załóżmy, że zbiór A ma n elementów oznaczmy je $v_1 \dots v_n$. Niech zbiór D składa się z wszystkich odległości między parami różnych elementów z A , wtedy zbiór D jest skończony, czyli posiada element najmniejszy $m > 0$ (jako odległość między elementami). $\mathcal{H}_\delta^0(A)$ ($s = 0$) przyjmuje wartości co najmniej n dla delt mniejszych od $\frac{m}{2}$. Wynika to z tego, że każdy element jest pokrywany różnymi zbiorami z pokrycia. Z drugiej strony rodzina kul o środkach w elementach z A i promieniach $\delta < \frac{m}{2}$ jest pokryciem zbioru A , co oznacza, że $\mathcal{H}_\delta^0(A) \leq n$. Zatem dla wszystkich $\delta < \frac{m}{2}$ zachodzi $\mathcal{H}_\delta^0(A) = n$, czyli zbiegając z deltą do 0^+ , dostajemy tezę.
2. W przypadku zbioru nieskończonego A rozważmy skończony podzbiór B o liczności k .

$$\mathcal{H}^0(A) \geq \mathcal{H}^0(B) = k$$

z monotoniczności miary.

Z dowolności k wynika, że $\mathcal{H}^0(A) = \infty$

■

Do następnego twierdzenia będzie nam potrzebna Własność Holdera.

Definicja 4.1 Niech $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją, do której istnieją stałe $L \geq 0$ oraz $\alpha \in (0; 1]$ takie, że:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha$$

Wtedy mówimy że funkcja f spełnia warunek Holdera ze stałą równą L i wykładnikiem α . Gdy $\alpha = 1$, warunek ten nazywamy warunkiem Lipschitza.

Twierdzenie 4.4 Niech $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ będzie funkcją spełniającą warunek Lipschitza lub Holdera mamy następującą własność:

$$\mathcal{H}_\alpha^s(f(A)) \leq M^{\frac{1}{\alpha}} \mathcal{H}^s(A)$$

Dowód. Weźmy $A \subset \bigcup_j C_j$, $\text{diam}(C_j) < \delta$ takie, że spełniony jest warunek

$$\mathcal{H}^s(A) + \varepsilon \geq \sum_j \text{diam}(C_j) \quad (4.3)$$

z warunku Holdera mamy:

$$\text{diam}(f(C_j)) \leq M \text{diam}(C_j)^\alpha$$

wtedy

$$\frac{1}{M^{\frac{1}{\alpha}}} \text{diam}(f(C_j))^{\frac{1}{\alpha}} \leq \text{diam}(C_j)$$

następnie korzystając z 4.3, otrzymujemy

$$\mathcal{H}^s(A) + \varepsilon \geq \frac{1}{M^{\frac{1}{\alpha}}} \sum_j \text{diam}(f(C_j))^{\frac{s}{\alpha}}$$

jako, że $f(A) \subset \bigcup_j f(C_j)$ i $\text{diam}(f(C_j)) \leq \rho := M\delta^\alpha$, mamy następującą nierówność:

$$M^{\frac{1}{\alpha}}(\mathcal{H}^s(A) + \varepsilon) \geq \mathcal{H}_{\rho}^{\frac{s}{\alpha}}(f(A))$$

Przy $\delta \rightarrow 0^+$ nasze $\rho \rightarrow 0^+$, co daje nam tezę. ■

5 Miara Hausdorffa zbioru Cantora

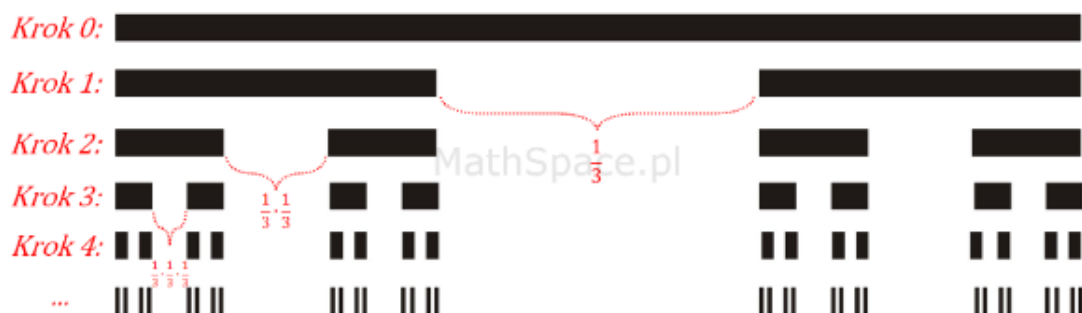
Celem tego rozdziału będzie policzenie miary Hausdorffa zbioru Cantora, ale zanim to zrobimy, potrzebujemy zdefiniować kilka podstawowych pojęć takich jak zbiór Cantora czy funkcja Cantora.

Definicja 5.1

Zbiór Cantora to podzbiór jednostkowego odcinka (odcinka o długości 1) powstały poprzez dokonanie:

1. podziału odcinka na 3 równe części
2. usunięcie środkowej części
3. powtórzenie procedury dla powstałych tak odcinków

Zbiór Cantora to zbiór stworzony, poprzez przecięcie powstałych tak odcinków przy nieskończonym wielu powtórzeniach tej procedury.



Rysunek 1: Zbiór Cantora

Dalej pokażemy konstrukcję iteracyjną funkcji Cantora. Będzie nam ona potrzebna przy badaniu miary Hausdorffa zbioru Cantora

Definicja 5.2 (Funkcja Cantora)

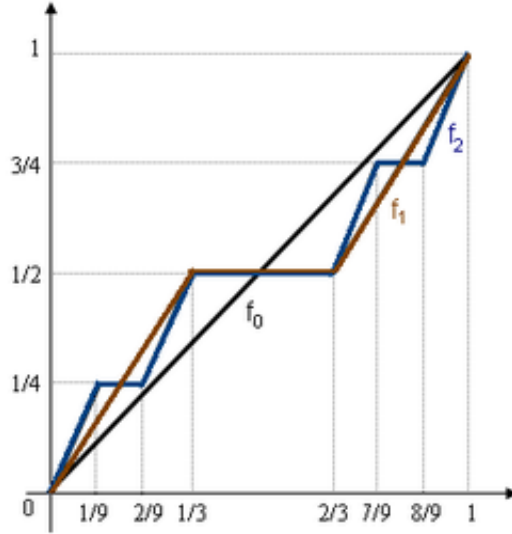
Zdefiniujemy ciąg funkcji $\{c_n\}$ na przedziale jednostkowym.

Niech $c_0(x) = x$

Następnie dla każdego naturalnego $n \geq 0$, będziemy definiować kolejną funkcję c_{n+1} przy pomocy c_n w następujący sposób:

$$c_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}c_n(3x) & \text{gdy } 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \text{gdy } \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}c_n(3x - 2) & \text{gdy } \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Granica jednostajną $c(x)$ takiego, ciągu funkcyjnego jest właśnie funkcja Cantora.



Rysunek 2: Funkcja Cantora

Tą konstrukcję dobrze obrazuje powyższy rysunek.

Po tych przygotowaniach możemy płynnie przejść do najważniejszej części tego rozdziału, to znaczy do następującego twierdzenia:

Twierdzenie 5.1

Wymiarem Hausdorffa zbioru Cantora jest $\gamma = \frac{\ln 2}{\ln 3}$, gdzie $\ln$ to logarytm naturalny.

$$\mathcal{H}^\gamma(C) \in (0; 1] \quad \gamma = \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

Dowód. Na początku zauważmy, że $C = \bigcap_n C_n$, gdzie każde C_n składa się z 2^n odcinków o długości $\frac{1}{3^n}$. Zatem biorąc to pod uwagę, otrzymujemy następującą nierówność:

$$\mathcal{H}_{\frac{1}{3^n}}^\gamma \leq \sum_n \text{diam}(C_n)^\gamma = 2^n \left(\frac{1}{3^n}\right)^\gamma = \left(\frac{2}{3^\gamma}\right)^n = 1$$

Ostatnią równość otrzymaliśmy poprzez wstawienie naszej $\gamma = \frac{\ln 2}{\ln 3}$. Jest to bardzo istotny fakt, gdyż mówi nam on, że dla tak dobranej γ wartość miary Hausdorffa na zbiorze Cantora jest skończona. Oznacza to, że aby dowieść, że tak dobrana γ jest wymiarem zbioru Cantora, wystarczy dowieść niezerowość naszej miary na tym zbiorze. Zrobimy to dowodząc, że funkcja Cantora spełnia warunki Holdera i używając twierdzenia 4.4.

Zgodnie z definicją 5.2 mamy, że funkcją Cantora jest granicą jednostajną wcześniej zdefiniowanego ciągu funkcyjnego $\{c_n\}$. Jednocześnie dla każdego x mamy:

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} \quad |c_{n+1}(x) - c_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} \quad (5.1)$$

zatem dla dowolnego $l \in \mathbb{N}$ i dowolnego $x \in \mathbb{R}$, otrzymujemy następujące oszacowanie:

$$|c_l(x) - c_n(x)| \leq \sum_{j=0}^{l-n} \frac{1}{2^{n+j}} < \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+j}} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Z drugiej strony każde c_n jest funkcją sklejoną z funkcji liniowych (co świetnie widać na rysunku 2) o maksymalnym nachyleniu $(\frac{3}{2})^n$ co za tym idzie

$$\forall_{x,y \in \mathbb{R}} \quad |c_n(x) - c_n(y)| \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n |x - y|$$

W rezultacie używając nierówności trójkąta i wcześniejszych wniosków, dostajemy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ następujący ciąg nierówności:

$$|c(x) - c(y)| \leq |c_n(x) - c(x)| + |c_n(x) - c_n(y)| + |c_n(y) - c(y)| \leq \quad (5.2)$$

$$\leq \frac{1}{2^{n-1}} + \left(\frac{3}{2}\right)^n |x - y| + \frac{1}{2^{n-1}} = \quad (5.3)$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^n |x - y| + \frac{4}{2^n} = \quad (5.4)$$

$$= \frac{1}{2^n} (3^n |x - y| + 4) \quad (5.5)$$

Teraz dla każdego $x, y \in [0; 1]$, możemy dobrać takie $n \in \mathbb{N}$, że

$$\frac{1}{3^n} \leq |x - y| \leq \frac{1}{3^{n-1}} \quad (5.6)$$

następnie stosując proste przekształcenia, otrzymujemy

$$1 \leq 3^n |x - y| < 3 \quad (5.7)$$

korzystając z tego oraz ze wzoru (5.5), otrzymujemy

$$|c(x) - c(y)| \leq \frac{1}{2^n} (3^n |x - y| + 4) \leq \frac{7}{2^n} = \frac{7}{3^{n\gamma}} \quad (5.8)$$

Z kolei używając 5.7 mamy

$$1 \leq 3^n |x - y|$$

$$\frac{1}{3^{n\gamma}} \leq |x - y|^\gamma$$

Zatem funkcja Cantora $c(x)$ spełnia wszystkie warunki Holdera bo:

$$\frac{1}{3^{n\gamma}} \leq |x - y|^\gamma \quad \wedge \quad |c(x) - c(y)| \leq 7|x - y|^\gamma$$

Pamiętając, że $c(C) = [0; 1]$ i korzystając z twierdzenia 4.4 finalnie otrzymujemy:

$$1 = \mathcal{H}^1(c(C)) \leq 7^{\frac{1}{\gamma}} \mathcal{H}^\gamma(C) \quad (5.9)$$

Reasumując udowodniliśmy, że miara Hausdorffa wymiaru γ jest skończona i niezerowa zatem na podstawie twierdzenia 3.3 i 3.2 otrzymujemy, że wymiarem zbioru Cantora jest $\gamma = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ ■

Literatura

- [1] Walter Rudin *Analiza rzeczywista i zespolona*
- [2] Stanisław Łojasiewicz *wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*