Wiad. Mat. 49 (2) 2013, 1–27

Krzysztof Stempak (Wrocław)

Analiza harmoniczna na przestrzeniach typu jednorodnego i przestrzeniach miarowo-metrycznych

1. Wprowadzenie

Teoria *przestrzeni typu jednorodnego* (ang. *spaces of homogeneous type*) została stworzona przez Coifmana i Weissa na początku lat siedemdziesiątych ubiegłego wieku – patrz ich znaną monografię [7] oraz równie znany artykuł [8]. Po upływie lat okazało się, że pojęcie przestrzeni typu jednorodnego jest niezwykle użyteczne i znajduje szerokie zastosowanie w wielu miejscach analizy. Z czasem pojęcie to zaczęło żyć swoim własnym życiem, a analiza harmoniczna uprawiana na przestrzeniach typu jednorodnego stała się ważnym podrozdziałem klasycznej analizy harmonicznej. Co roku publikowanych jest naprawdę dużo prac z frazą *spaces of homogeneous type* w tytule. Ostatnio wydaną monografią na temat przestrzeni typu jednorodnego jest książka [9].

Chcąc podać konkretny i równocześnie bardzo istotny przykład uzasadniający ważność teorii przestrzeni typu jednorodnego wspomnijmy, że przy rozszerzaniu fundamentalnej teorii operatorów Calderóna–Zygmunda z przestrzeni euklidesowych do bardziej ogólnego kontekstu okazało się, że zasadnicze argumenty mają raczej charakter teoriomiarowy niż analityczno-fourierowski. W rezultacie, wspomniane rozszerzenie osadzone zostało właśnie w kontekście przestrzeni typu jednorodnego, a więc przestrzeni quasi-metrycznej wyposażonej dodatkowo w miarę borelowską, która współgra z quasi-metryką w odpowiedni sposób (spełnia warunek podwajania).

Mówiąc o *klasycznej analizie harmonicznej* zwyczajowo myśli się o obiektach (na przykład grupach Liego, przestrzeniach symetrycznych, pewnych rozmaitościach różniczkowych), z wyróżnionym operatorem różniczkowym drugiego rzędu, „laplasjanem”, wokół którego koncentrują się pojęcia i teorie. Jeżeli grupa Liego jest nieprzemienna, to czasami mówi się o *niekomutatywnej analizie harmonicznej.* Wprowadzenie pojęcia przestrzeni typu jednorodnego pozwoliło w pewnym sensie na rezygnację ze struktur różniczkowych, z zachowaniem bogatego zestawu obiektów do analizy. Okazało się bowiem, że znacząca większość wyników i pojęć klasycznej analizy harmonicznej (lematy pokryciowe, operator maksymalny Hardy'ego–Littlewooda, wagi A_p Muckenhoupta, rozkład Calderóna–Zygmunda, operator całkowania ułamkowego) ma swoje dobrze umotywowane odpowiedniki w przestrzeniach typu jednorodnego. Taka sama konkluzja obowiązuje dla większości teorii klasycznej analizy harmonicznej (teorie: Paleya–Littlewooda, przestrzeni Hardy'ego i przestrzeni BMO, przestrzeni Triebela–Lizorkina, operatorów Calderóna–Zygmunda).

W latach dziewięćdziesiątych ubiegłego wieku, dzięki pionierskim pracom Nazarowa, Treila i Volberga (patrz artykuł [23]) oraz, niezależnie, Tolsy (praca [31]), okazało się, że istotną część rezultatów dotyczących fundamentalnych pojęć analizy harmonicznej można udowodnić w nieco innym kontekście, bez warunku podwajania. Dokładniej, we wspomnianych pracach rozważano miarę borelowską μ określoną na $\mathbb{R}^n$, spełniającą warunek wzrostu $\mu(B(x,r)) \leqslant D_\mu r^\tau$, gdzie $0 < \tau \leqslant n$, przy czym $B(x,r)$ oznacza kulę euklidesową o środku w x i promieniu r, a D_μ oznacza uniwersalną stałą niezależną od x i r. Oczywiście naturalne stało się dążenie do dalszego uogólnienia nowej teorii poprzez ulokowanie jej w ogólnym kontekście przestrzeni metrycznej z miarą spełniającą analogiczny warunek wzrostu. Program ten był (i w dalszym ciągu jest) realizowany w pierwszej dekadzie bieżącego stulecia – zobacz na przykład pracę Hytönena [15].

Celem niniejszego artykułu jest omówienie pewnych aspektów rozwoju analizy harmonicznej w jej nieco abstrakcyjnej formie, począwszy od przestrzeni typu jednorodnego, a skończywszy na przestrzeniach miarowo-metrycznych. Korzystając z okazji pokażemy, że w wielu sytuacjach kontekst „jednorodny" może być zredukowany do sytuacji, gdy rozpatrujemy przestrzeń miarowo-metryczną spełniającą warunek podwajania.

Dygresje terminologiczne. Zamiast *space of homogeneous type* w angielskojęzycznej literaturze używa się zamiennie terminu *homogeneous space in the sense of Coifman and Weiss*; we francuskojęzycznej literaturze mówi się *espace homogène.* W tym opracowaniu mówimy o *przestrzeni* *typu jednorodnego.* Używanie terminu *przestrzeń jednorodna* byłoby mylące, gdyż przestrzeń jednorodna to przede wszystkim obiekt G/H gdzie, powiedzmy, G jest grupą Liego, a H jest jej podgrupą domkniętą.

Jeżeli quasi-metryka ρ występująca w definicji przestrzeni typu jednorodnego jest po prostu metryką, to w angielskojęzycznej literaturze używa się wówczas terminu *doubling metric space*, lub krótko *doubling space*. Natomiast analizę na przestrzeniach metrycznych z miarą, która nie spełnia warunku podwajania, określa się mianem *non-homogeneous* lub *non-doubling*.

Uwagi notacyjne. $A := B$ oznacza, że obiekt A jest z definicji równy obiektowi B; $\mathrm{d}x$ oznacza miarę Lebesgue'a na $\mathbb{R}^n$ lub na jej mierzalnym podzbiorze.

2. Przestrzenie quasi-metryczne

Quasi-metryką na niepustym zbiorze X nazywamy odwzorowanie $\rho\colon X \times X \to [0, \infty)$ spełniające następujące warunki:

1° dla każdych $x, y \in X$, $\rho(x, y) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$;
2° dla każdych $x, y \in X$, $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3° istnieje taka stała $K \geqslant 1$, że dla każdych $x, y, z \in X$,

$$\rho(x, y) \leqslant K\big(\rho(x, z) + \rho(z, y)\big).$$

Parę (X, ρ) nazywamy wówczas *przestrzenią quasi-metryczną*; jeżeli $K = 1$, to ρ jest metryką, a (X, ρ) jest przestrzenią metryczną. Dwie quasi-metryki ρ i ρ' na X nazywamy *równoważnymi*, jeśli $c^{-1}\rho'(x, y) \leqslant \rho(x, y) \leqslant c\rho'(x, y)$ z pewną stałą $c > 0$ niezależną od $x, y \in X$.

Znaczącą rodziną przestrzeni quasi-metrycznych są te, które pochodzą od quasi-norm. Przypomnijmy, że *quasi-normą* na przestrzeni liniowej X (rzeczywistej lub zespolonej) nazywamy odwzorowanie $\|\cdot\|\colon X \times X \to [0, \infty)$ spełniające warunki:

– dla każdego $x \in X$, $\|x\| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$;
– dla każdego $x \in X$ i każdego skalara λ, $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$;
– istnieje taka stała $K \geqslant 1$, że dla każdych $x, y \in X$,

$$\|x + y\| \leqslant K\big(\|x\| + \|y\|\big).$$

Parę $(X, \|\cdot\|)$ nazywamy wówczas *przestrzenią quasi-unormowaną*; jeśli $K = 1$, to $\|\cdot\|$ jest normą, a $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią unormowaną. Dwie quasi-normy $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|'$ na X nazywamy *równoważnymi*, jeśli $c^{-1}\|x\|' \leqslant \|x\| \leqslant c\|x\|'$ z pewną stałą $c > 0$ niezależną od $x \in X$. Jeżeli $\|\cdot\|$ jest quasi-normą na X, to $\rho(x, y) = \|x - y\|$ definiuje odpowiadającą jej quasi-metrykę na X (niezmienniczą na przesunięcia, z tą samą stałą K).

Oczywiście jeśli $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|'$ są równoważne, to odpowiadające im quasi-metryki ρ i ρ' są także równoważne.

Kanoniczny sposób wprowadzenia topologii przy pomocy quasi-metryki (a więc w szczególności przy pomocy quasi-normy) jest następujący: deklarujemy, że $G \subset X$ jest otwarty, tzn. $G \in \mathcal{F}_\rho$, gdzie $\mathcal{F}_\rho$ jest oznaczeniem kanonicznej topologii, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in G$ istnieje takie $r > 0$, że $B(x,r) := \{y \in X\colon \rho(x,y) < r\} \subset G$. W dalszym ciągu $B(x,r)$ nazywać będziemy *kulą* o środku w x i promieniu r, choć oczywiście należałoby raczej mówić o *quasi-kulach*; zauważmy również, że ogólnie kula jako zbiór może nie mieć jednoznacznie wyznaczonego ani środka, ani promienia. Jest jasne, że jeśli ρ_0 jest quasi-metryką równoważną z ρ, to $\mathcal{F}_{\rho_0} = \mathcal{F}_\rho$; ponadto, dla każdego $a > 0$, ρ^a jest quasi-metryką oraz $\mathcal{F}_{\rho^a} = \mathcal{F}_\rho$.

Zalety powyższej definicji są następujące:
- jest ona zgodna z definicją topologii metrycznej w sytuacji, gdy quasi-metryka jest po prostu metryką;
- topologia $\mathcal{F}_\rho$ jest metryzowalna.

Drugi fakt można uzasadnić przy pomocy argumentów ogólnotopologicznych albo konstruktywnie, przez użycie tzw. metody p-łańcucha do skonstruowania metryki równoważnej z pewną dodatnią potęgą quasi-metryki ρ. Dokładniej, mając quasi-metrykę ρ, dla $p \in (0,1]$ definiujemy

$$d_p(x,y) = \inf\Big\{\sum_{j=1}^{n} \rho(x_{j-1},x_j)^p : x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y,\ n \geqslant 1\Big\}. \tag{1}$$

Oczywiście d_p spełnia postulaty 2° oraz 3° definicji quasi-metryki, nie ma jednak gwarancji, że również własność 1° jest spełniona.

Okazuje się jednak, że dla pewnej szczególnej wartości p również warunek 1° może być spełniony. Ma miejsce następujący, w pewnym sensie fundamentalny dla teorii przestrzeni quasi-metrycznych, rezultat.

Twierdzenie 2.1. *Niech (X,ρ) będzie przestrzenią quasi-metryczną ze stałą $K \geqslant 1$ w (quasi-)nierówności trójkąta i niech parametr $p \in (0,1]$ będzie wyznaczony równością $(2K)^p = 2$. Wówczas funkcja d_p zadana wzorem (1) jest metryką; co więcej, d_p jest równoważna z ρ^p, a dokładniej, $d_p \leqslant \rho^p \leqslant 4d_p$.*

Dowód twierdzenia 2.1 można znaleźć w artykule [28], gdzie również znajdują się liczne odniesienia bibliograficzne do tego tematu. Wobec uwagi następującej po (1) kluczowym punktem dowodu jest wykazanie nierówności $\rho^p \leqslant 4d_p$, co daje $d_p(x,y) > 0$ dla $x \neq y$.

Analogiczne twierdzenie dla przestrzeni quasi-unormowanych (z zamianą terminu „quasi-metryka” na termin „quasi-norma”, a symbolu ρ na symbol $\|\cdot\|$) nosi nazwę *twierdzenia Aoki–Rolewicza*. Jednak dowód twierdzenia „quasi-metrycznego” jest niezależny od dowodu twierdzenia „quasi-normowego”.

Jeżeli warunek 3° w definicji quasi-metryki zastąpimy warunkiem

$$\rho(x,y) \leqslant \big(\rho(x,z)^p + \rho(z,y)^p\big)^{1/p}, \quad x,y,z \in X, \tag{2}$$

gdzie $p \in (0,1]$ jest pewną stałą (zauważmy natychmiast, że nierówność (2) implikuje 3° ze stałą $K = 2^{1/p-1}$), to powiemy, że quasi-metryka ρ jest p-metryką.

Ogólnie, dla quasi-metryki ρ może się zdarzyć (gdy $K > 1$), że sama kula nie jest zbiorem otwartym w topologii $\mathcal{F}_\rho$ („najprostszy” przykład: $X = \{-1\} \cup [0,\infty)$ ze zwykłą odległością za wyjątkiem jednej pary punktów, $\rho(-1,0) := 1/2$; wówczas $B(-1,1) = \{-1,0\}$ nie zawiera żadnej kuli postaci $B(0,\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, więc nie jest zbiorem otwartym). Co więcej, można nawet podać przykład quasi-metryki, dla której wszystkie kule są zbiorami nieborelowskimi względem topologii $\mathcal{F}_\rho$.

Przykład. Niech $X = \mathbb{R}^2$ i niech E będzie symetrycznym względem $(0,0)$ podzbiorem okręgu $\Sigma^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 = 1\}$, nie będącym zbiorem borelowskim. Zdefiniujmy

$$S = \{\tfrac{1}{2}x : x \in \Sigma^1 \setminus E\} \cup \{2x : x \in E\}.$$

Wówczas $S \subset \{x \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leqslant \|x\|_2 \leqslant 2\}$ oraz dla każdego $x \in X \setminus \{(0,0)\}$, przekrój $\{ax : a > 0\} \cap S$ jest jednoelementowy. Jak łatwo sprawdzić, powyższe własności implikują, że quasi-funkcjonał $\|\cdot\|_S$ typu Minkowskiego na X zadany wzorem

$$\|x\|_S = a > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^{-1}x \in S, \qquad (0,0) \neq x \in X$$

i $\|(0,0)\|_S = 0$, definiuje quasi-normę na X, a topologia generowana przez $\|\cdot\|_S$ pokrywa się z topologią euklidesową.

Z zadeklarowanych własności zbioru S wynika, że kula jednostkowa $B_{\|\cdot\|_S}$ o środku w $(0,0)$ odpowiadająca quasi-normie $\|\cdot\|_S$ nie jest zbiorem borelowskim; to samo można powiedzieć o każdej kuli. Rzeczywiście, założenie, że $B_{\|\cdot\|_S}$ jest zbiorem borelowskim w $\mathbb{R}^2$, implikowałoby, że także $B_{\|\cdot\|_S} \cap \Sigma^1 = E$ jest borelowski – sprzeczność.

Jeżeli jednak ρ jest p-metryką dla pewnego $p \in (0,1]$, to – jak łatwo zobaczyć – każda kula jest zbiorem otwartym w topologii $\mathcal{F}_\rho$. Ponieważ dla zadanej quasi-metryki ρ, quasi-metryka $\rho' := d_p^{1/p}$ z p wziętym z twierdzenia 2.1 jest p-metryką równoważną z ρ, więc topologia $\mathcal{F}_\rho = \mathcal{F}_{\rho'}$

staje się „porządna” po zamianie ρ na równoważną quasi-metrykę ρ' („porządna” w tym sensie, że wszystkie kule pochodzące od ρ' są już zbiorami otwartymi, a więc i borelowskimi).

3. Przestrzenie typu jednorodnego

Niech (X, ρ) będzie taką przestrzenią quasi-metryczną, że wszystkie kule są zbiorami borelowskimi względem $\mathcal{F}_\rho$; od tej pory jest to *obowiązujące założenie*. Miarę borelowską μ na X (nietrywialną w tym sensie, że $\mu(X) > 0$) i spełniającą *warunek podwajania*

$$\mu(B(x, 2r)) \leqslant C_\mu \mu(B(x, r)), \tag{3}$$

ze stałą $C_\mu \geqslant 1$ uniwersalną dla wszystkich $x \in X$ i $r > 0$, nazywamy *miarą dublującą*; o C_μ myśli się tu jako o *minimalnej* stałej spełniającej nierówność (3). Oczywiście nierówność ta implikuje, że $\mu(B(x, r)) > 0$ dla każdej kuli $B(x, r)$.

Jak łatwo sprawdzić, warunek podwajania (3) pociąga za sobą analogiczny warunek z zamianą parametru 2 na dowolny parametr $k > 1$; dla każdego $k > 1$ istnieje zatem taka stała $C_{\mu,k}$ (można wziąć $C_{\mu,k} = C_\mu^{1+\log_2 k}$), że

$$\mu\big(B(x, kr)\big) \leqslant C_{\mu,k}\, \mu\big(B(x, r)\big), \qquad x \in X,\ r > 0. \tag{4}$$

Inną konsekwencją warunku (3) jest oszacowanie

$$\mu\big(B(x, r)\big) \leqslant C_\mu r^{c_\mu} \mu\big(B(x, 1)\big), \qquad x \in X,\ r \geqslant 1,$$

ze stałą $c_\mu = \log_2 C_\mu$, co oznacza podwielomianowy wzrost miar kul wraz ze wzrostem promienia.

Definicja 3.1. *Przestrzenią typu jednorodnego* będziemy nazywać trójkę (X, ρ, μ), gdzie (X, ρ) jest przestrzenią quasi-metryczną, a μ jest miarą borelowską na X spełniającą warunek podwajania oraz $\mu(B(x, r)) < \infty$ dla każdej kuli $B(x, r)$.

Zauważmy, że jakakolwiek regularność miary μ nie jest tu wymagana. Liczbę $D = \log_2 C_\mu$ nazywa się niekiedy *wymiarem jednorodnym* przestrzeni (X, ρ, μ) (w sytuacji przestrzeni $(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}x)$ z metryką euklidesową, jej wymiarem jednorodnym jest n). Jest także oczywiste, że jeśli miara μ spełnia *warunek Ahlforsa*

$$a^{-1} r^\tau \leqslant \mu\big(B(x, r)\big) \leqslant a r^\tau,$$

z pewnymi stałymi $a \geqslant 1$ i $\tau > 0$ niezależnymi od $x \in X$ i $r > 0$, to pociąga to spełnianie warunku podwajania przez miarę μ.

Pewien komentarz dotyczący warunku Ahlforsa wydaje się być w tym miejscu właściwy. Otóż spełnianie tegoż warunku bez ograniczenia na r

wymusza nieskończoność miary μ, czyli równość $\mu(X) = \infty$ (równoważnie, nieskończoność średnicy $\operatorname{diam} X := \sup_{x,y\in X} \rho(x,y)$; zauważmy bowiem, że warunki $\mu(X) < \infty$ i $\operatorname{diam} X < \infty$ są równoważne dla miary dublującej). Tak więc w sytuacji, gdy $\mu(X) < \infty$, naturalne jest ograniczenie $0 < r < A$, gdzie $A > 0$ jest dowolnie ustalone.

Inną natychmiastową konsekwencją warunku podwajania (3) jest następująca własność geometryczna (patrz dowód w książce [7, str. 67–68]):

> istnieje taka stała $N \in \mathbb{N}$, że dowolna kula $B(x,r)$, gdzie $x \in X$ oraz $r > 0$, zawiera co najwyżej N takich punktów $\{x_1, \ldots, x_N\}$, że $\rho(x_i, x_j) \geqslant \frac{1}{2} r$.

Co ciekawe, własność ta zawarta była w oryginalnej definicji przestrzeni typu jednorodnego w książce [7]. Jak łatwo sprawdzić, powyższa własność jest w kontekście przestrzeni quasi-metrycznej (X,ρ) równoważna następującej:

> istnieje taka stała $N' \in \mathbb{N}$, że dla dowolnej kuli $B(x,r)$, gdzie $x \in X$ oraz $r > 0$, istnieje co najwyżej N' takich punktów $\{x_1, \ldots, x_{N'}\}$, że kule $B(x_i, \frac{1}{2} r)$ pokrywają $B(x,r)$.

Tę własność nazywa się *geometrycznym warunkiem podwajania*. Co więcej, w obu własnościach współczynnik $\frac{1}{2}$ zastąpić można dowolnym parametrem $\delta \in (0,1)$, a istnienie stałych $N = N(\delta)$ i $N' = N'(\delta)$ będzie w dalszym ciągu zagwarantowane (patrz praca [15]). Pozwala to uzasadnić następującą własność topologiczną przestrzeni typu jednorodnego.

Lemat 3.1. *Przestrzeń typu jednorodnego jest ośrodkowa.*

Dowód. Przypomnijmy, że istnienie miary dublującej na przestrzeni quasi-metrycznej (X,ρ) pociąga geometryczny warunek podwajania z dowolnym parametrem $\delta \in (0,1)$. Ustalmy punkt odniesienia $x_0 \in X$ i dla każdego $j = 2, 3, \ldots$, rozważmy kulę $B(x_0, j)$. Dla $\delta_j = j^{-2}$ dobierzmy takie N'_j, jak w geometrycznym warunku podwajania i niech $\{x_1, \ldots, x_{N'_j}\}$ będzie zbiorem środków kul o promieniu $\frac{1}{j}$, które pokrywają $B(x_0, j)$. Suma mnogościowa tych zbiorów po $j = 2, 3, \ldots$ tworzy ośrodek w X. $\square$

Warto w tym miejscu zauważyć, że przestrzeń typu jednorodnego nie musi być lokalnie zwarta. Przykładem niech będzie $X = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ze zwykłą odległością punktów i miarą dziedziczoną z miary Lebesgue'a na $\mathbb{R}$. Dalsze informacje dotyczące strukturalnych własności przestrzeni typu jednorodnego można znaleźć w artykule [30].

Bycie przestrzenią typu jednorodnego nie jest własnością dziedziczną: jeśli (X, ρ, μ) jest przestrzenią typu jednorodnego oraz $Y \subset X$, $\mu(Y) > 0$, to $(Y, \rho|_Y, \mu|_Y)$ niekoniecznie taką być musi. Dla przykładu rozważmy przestrzeń $(\mathbb{R}^2, \mathrm{d}x)$ z metryką d_∞ generowaną przez normę $\|\cdot\|_\infty$ i niech $Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant e^{-1/x}\}$. Ponieważ objętość kuli o środku w $(0,0)$ maleje eksponencjalnie wraz z $r \to 0^+$, więc warunek podwajania spełniony być nie może.

Obszerne listy przykładów przestrzeni typu jednorodnego znajdują się w książce [8, str. 588–590] oraz w monografii [6, str. 89–92]. Korzystając z okazji podajemy krótką listę rozłączną ze wspomnianymi, ale zawierającą przykłady istotne z punktu widzenia zastosowań teorii. W każdym z poniższych przykładów quasi-metryka jest tak naprawdę metryką wybraną na jeden z dwóch sposobów: metryką euklidesową d_2 generowaną przez normę $\|\cdot\|_2$ lub metryką d_∞ generowaną przez $\|\cdot\|_\infty$. Wybranie d_2 sprawia, że kule w przykładach (1) i (4) są zwykłymi kulami euklidesowymi, natomiast wybór d_∞ daje kostki ze ścianami równoległymi do osi jako kule (w pozostałych przykładach kule są przekrojami kul o środkach w odpowiednim zbiorze z samą przestrzenią; oczywiście, dla $n = 1$ powyższe rozróżnienia nie mają znaczenia). Zauważmy jeszcze, że sprawdzenie warunku podwajania (3) dla każdej z poniższych miar jest zadaniem elementarnym, choć niekiedy żmudnym.

Przykłady. 1. Niech $X = \mathbb{R}^n$ z miarą $\mathrm{d}\mu_\alpha(x) = w_\alpha(x)\,\mathrm{d}x$, gdzie $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (-1, \infty)^n$ jest ustalonym wielowskaźnikiem, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, a $w_\alpha(x) = \prod_{i=1}^n |x|^{2\alpha_i + 1}$; taka przestrzeń pojawia się w analizie harmonicznej związanej z teorią Dunkla dla grupy odbić izomorficznej z $\mathbb{Z}_2^n$.

2. Niech $X = (0, \infty)^n$ z miarą $\mathrm{d}\mu_\alpha^+(x) = w_\alpha^+(x)\,\mathrm{d}x$, gdzie α jest jak wyżej, a $w_\alpha^+(x)$ jest obcięciem w_α do $(0,\infty)^n$; taka przestrzeń pojawia się przy badaniu wielowymiarowych rozwinięć Laguerre'a typu splotowego i przy badaniu wielowymiarowej zmodyfikowanej transformaty Hankela.

3. Niech $X = (0,1)^n$ z miarą $d\widetilde{\mu}_\alpha^+(x) = \widetilde{w}_\alpha^+(x)\,\mathrm{d}x$, gdzie α jest jak wyżej, a $\widetilde{w}_\alpha^+(x)$ jest obcięciem w_α do $(0,1)^n$; taka przestrzeń pojawia się przy badaniu wielowymiarowych rozwinięć Fouriera–Bessla.

4. Niech $X = \mathbb{R}^n$ z miarą $\mathrm{d}\mu_\kappa(x) = w_\kappa(x)\,\mathrm{d}x$, gdzie

$$w_\kappa(x) = \prod_{\gamma \in R_+} |\langle \gamma, x \rangle|^{2\kappa_\gamma},$$

R_+ jest (skończonym) układem pierwiastków dodatnich rzędu n (co oznacza, że $\dim \operatorname{lin} R_+ = n$) ustalonej grupy odbić G, $\kappa = (\kappa_\gamma)_{\gamma \in R_+}$ jest funkcją krotnościową określoną na R_+ o własności $\kappa_\gamma > -1$ dla $\gamma \in R_+$, a $\langle \cdot\,,\cdot\rangle$ oznacza kanoniczny iloczyn skalarny na $\mathbb{R}^n$; taka przestrzeń pojawia się w analizie harmonicznej związanej z teorią Dunkla dla dowolnej grupy odbić.

5. Niech $X = (0,\pi)^n$ z miarą $\mathrm{d}\mu_{\alpha,\beta}(\theta) = w_{\alpha,\beta}(\theta)\,\mathrm{d}\theta$, gdzie $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_n) \in (-1,\infty)^n$ są ustalonymi wielowskaźnikami, oraz

$$w_{\alpha,\beta}(\theta) = \prod_{i=1}^{n} (\sin\tfrac{\theta_i}{2})^{2\alpha_i+1}(\cos\tfrac{\theta_i}{2})^{2\beta_i+1}, \quad \theta = (\theta_1,\dots,\theta_n) \in (0,\pi)^n;$$

taka przestrzeń pojawia się przy badaniu wielowymiarowych rozwinięć Jacobiego. W nieco innej konfiguracji rozważa się $X = (-1,1)^n$ z miarą $\mathrm{d}\widetilde{\mu}_{\alpha,\beta}(x) = \widetilde{w}_{\alpha,\beta}(x)\,\mathrm{d}x$, gdzie α,β są jak wyżej, zaś

$$\widetilde{w}_{\alpha,\beta}(x) = \prod_{i=1}^{n} (1-x_i)^{\alpha_i}(1+x_i)^{\beta_i}, \quad x = (x_1,\dots,x_n) \in (-1,1)^n.$$

Powyższe obiekty znalazły ważne miejsce między innymi w artykułach [3, 25, 26].

4. Podstawowe narzędzia i pojęcia

Operator maksymalny Hardy'ego–Littlewooda (w dalszej części używać będziemy skrótu H–L) jest jednym z podstawowych narzędzi analizy harmonicznej, służącym głównie do oszacowań innych ważnych operatorów. W kontekście przestrzeni typu jednorodnego (X,ρ,μ) jego definicja jest następująca: dla funkcji lokalnie całkowalnej $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X,\mu)$ (lokalność nie ma tu nic wspólnego ze zwartością i oznacza wyłącznie całkowalność po każdej kuli) definiujemy

$$Mf(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f|\,\mathrm{d}\mu, \quad x \in X, \tag{5}$$

gdzie supremum brane jest po wszystkich kulach B zawierających x. Mówiąc ściślej, wzór (5) jest definicją *niescentrowanego* operatora maksymalnego H–L. Jeśli będziemy w nim brać supremum tylko po kulach o środku w x, to otrzymany operator – oznaczmy go M^c – jest nazywany *scentrowanym* operatorem maksymalnym H–L. Oczywiście $CMf \leqslant M^c f \leqslant Mf$ dla każdej $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X,\mu)$, przy czym pierwsza z nierówności (C jest tutaj uniwersalną stałą niezależną od f) jest konsekwencją warunku podwajania. Jak łatwo sprawdzić, dla $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X,\mu)$ funkcje Mf i $M^c f$ są dolnie półciągłe, a więc borelowsko mierzalne. Tak naprawdę, określenie Mf wzorem (5) ma sens dla funkcji f nie tylko z $L^1_{\mathrm{loc}}(X,\mu)$; możemy myśleć, że f jest jakąkolwiek funkcją borelowską o wartościach zespolonych lub o wartościach z rozszerzonego systemu $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Zachowanie się operatora M na ogólnej funkcji $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X,\mu)$ może być bardzo złe w tym sensie, że $Mf(x) = \infty$ dla wszystkich $x \in X$. Przykładem jest tu funkcja $f(x) = \|x\|$ rozważana na $(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}x)$, gdzie $n \geqslant 1$. Powstaje zatem pytanie, dla jakiej podklasy $L^1_{\mathrm{loc}}(X,\mu)$ możemy zagwarantować, że $Mf(x) < \infty$, μ-prawie wszędzie, dla wszystkich funkcji f z tej podklasy. W roku 1939 Wiener wskazał na $L^1(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}x)$ jako podprzestrzeń $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}x)$, dla której tak właśnie jest. Zauważmy jednak, że nawet dla całkowalnej funkcji f, Mf może być w dalszym ciągu „nieporządna": jak łatwo sprawdzić, funkcja f zadana na $\mathbb{R}$ wzorem $f(x) = \frac{1}{x(\log x)^2}$ dla $x \in (0,1)$ i $f(x) = 0$ w przeciwnym razie, ma tę własność, że $Mf \notin L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathrm{d}x)$.

Wybór $(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}x)$ jako przestrzeni miarowej nie ma tu znaczenia; twierdzenie Wienera pozostaje prawdziwe w szerokim kontekście przestrzeni typu jednorodnego, a jego dowody opierają się na *lematach pokryciowych.* Dla zademonstrowania, w jaki sposób się to dzieje, sformułujemy i udowodnimy łatwą i elegancką wersję takiego lematu, a mianowicie lemat pokryciowy typu Vitalego–Wienera. W dalszym ciągu, jeśli $B = B(x,r)$ i $k > 0$, to $kB := B(x,kr)$.

Lemat 4.1. *Niech $\{B_1,\dots,B_m\}$ będzie skończoną rodziną kul w przestrzeni X. Wówczas istnieje taka podrodzina $\{B_{j_1},\dots,B_{j_n}\}$ kul parami rozłącznych, że*

$$\bigcup_{i=1}^m B_i \subset \bigcup_{s=1}^n kB_{j_s},$$

gdzie $k = K(2K+1)$, a K jest stałą z (quasi-) nierówności trójkąta (3°).

Dowód. Niech $B_i = B(x_i,r_i)$, $i = 1,\dots,m$. Bez zmniejszenia ogólności załóżmy, że promienie kul $B_1,\dots,B_m$ tworzą ciąg słabo malejący: $r_1 \geqslant r_2 \geqslant \dots \geqslant r_m$. Bierzemy $j_1 = 1$, czyli pierwszą wybraną kulą jest B_1, a jako następną kulę wybieramy pierwszą z listy $B_2,\dots,B_m$ rozłączną z B_1 (o ile taka istnieje). Powtarzamy procedurę wyboru aż do jej zakończenia. Oczywiście sposób wyboru gwarantuje wzajemną rozłączność otrzymanych kul $B_{j_1},\dots,B_{j_n}$, $1 \leqslant n \leqslant m$. Wystarczy więc wykazać, że rodzina $\{kB_{j_s}\}_{s=1}^n$ pokrywa wyjściową rodzinę $\{B_i\}_{i=1}^m$.

Weźmy jedną z wyjściowych kul B_{i_0}, $i_o \in \{2,\dots,m\}$, która nie znalazła się wśród wyselekcjonowanych kul B_{j_s}, $s = 1,\dots,n$ (o ile takowa istnieje; jeśli nie, to $n = m$ i wszystkie kule były od początku rozłączne). Ze sposobu selekcji wynika, że B_{i_0} przecina w niepusty sposób jedną z już wyselekcjonowanych kul; niech to będzie kula B_{j_p} (zatem $r_{j_p} \geqslant r_{i_0}$). Twierdzimy, że $B_{i_0} \subset kB_{j_p}$. Rzeczywiście, niech $z \in B(x_{i_0}, r_{i_0}) \cap B(x_{j_p}, r_{j_p})$ i weźmy dowolny $x \in B(x_{i_0}, r_{i_0})$. Wówczas

$$\begin{aligned} \rho(x, x_{j_p}) \leqslant K\big(\rho(x, z) + \rho(z, x_{j_p})\big) &< K\big(K\big(\rho(x, x_{i_0}) + \rho(x_{i_0}, z)\big) + r_{j_p}\big) \\ &< K\big(K(r_{i_0} + r_{i_0}) + r_{j_p}\big) \\ &\leqslant K(2K+1) r_{j_p}, \end{aligned}$$

co pokazuje, że $B(x_{i_0}, r_{i_0}) \subset B(x_{j_p}, kr_{j_p})$. □

Wróćmy do zasadniczego zagadnienia.

Twierdzenie 4.2. *Niech* (X, ρ, μ) *będzie przestrzenią typu jednorodnego. Wówczas operator maksymalny H–L spełnia następujące oszacowanie słabego typu* $(1,1)$:

$$\lambda\mu\big(\{x \in X : Mf(x) > \lambda\}\big) \leqslant C_1 \|f\|_{L^1(X,\mu)}, \quad \lambda > 0, \tag{6}$$

ze stałą $C_1 > 0$ *niezależną od* $f \in L^1(X, \mu)$, *i w konsekwencji również oszacowanie mocnego typu* (p, p) *dla dowolnego* $p > 1$,

$$\|Mf\|_{L^p(X,\mu)} \leqslant C_p \|f\|_{L^p(X,\mu)}, \quad f \in L^p(X, \mu). \tag{7}$$

Dowód. Wystarczy wykazać warunek (6), gdyż użycie twierdzenia interpolacyjnego Marcinkiewicza wraz z oczywistą nierównością $\|Mf\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$ daje natychmiast warunek (7). Dla prostoty, dowód nierówności (6) przeprowadzimy przy dodatkowym założeniu, że X jest lokalnie zwarta (z topologią $\mathcal{F}_\rho$), a μ jest wewnętrznie regularna na zbiorach otwartych. W ogólnym przypadku, bez założenia regularności, dowód wymaga użycia znacznie subtelniejszego lematu pokryciowego (patrz książki [7, Théorème (1.2)] lub [13, Theorem 1.2] oraz dowód twierdzenia 2.2 tamże).

Dowód oszacowania (6) przebiega według znanego schematu. Ustalmy $f \in L^1(X, \mu)$ oraz $\lambda > 0$ i niech $E_\lambda = \{x \in X : Mf(x) > \lambda\}$; E_λ jest zbiorem otwartym. Dla każdego $x \in E_\lambda$ wybierzmy taką kulę B_x, że $x \in B_x$ i $\frac{1}{\mu(B_x)} \int_{B_x} |f| \, \mathrm{d}\mu > \lambda$. Weźmy zwarty podzbiór $\mathcal{K} \subset E_\lambda$. Oczywiście $\mathcal{K} \subset \cup_{x \in E_\lambda} B_x$, więc ze zwartości $\mathcal{K}$ otrzymujemy $\mathcal{K} \subset \cup_{i=1}^m B_{x_i}$, gdzie $x_i \in E_\lambda$. Stosujemy lemat 4.1 do rodziny $\{B_i\}_{i=1}^m$, gdzie $B_i = B_{x_i}$, otrzymując podrodzinę $\{B_{j_s}\}_{s=1}^n$ parami rozłącznych kul z własnością jak w lemacie. Mamy wówczas

$$\mu(\mathcal{K}) \leqslant \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{m} B_i\Big) \leqslant \mu\Big(\bigcup_{s=1}^{n} kB_{j_s}\Big) \leqslant \sum_{s=1}^{n} \mu(kB_{j_s})$$

$$\leqslant C_{\mu,k} \sum_{s=1}^{n} \mu(B_{j_s}) \leqslant C_{\mu,k} \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{\lambda} \int_{B_{j_s}} |f| \,\mathrm{d}\mu \leqslant C_{\mu,k} \frac{1}{\lambda} \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu.$$

Wewnętrzna regularność miary, czyli warunek $\sup_{\mathcal{K}\subset E_\lambda} \mu(\mathcal{K}) = \mu(E_\lambda)$, implikuje żądaną nierówność (6). □

Czasami wygodnie jest supremum wyrażenia z lewej strony nierówności (6) po $\lambda > 0$ oznaczyć symbolem $\|Mf\|_{L^{1,\infty}(X,\mu)}$ i mówić o *przestrzeni Lorentza* $L^{1,\infty}$ i *słabej (quasi-)normie* $\|\cdot\|_{L^{1,\infty}}$ odpowiednio. Wówczas oszacowanie (6) można zinterpretować jako ograniczoność operatora M z $L^1(X,\mu)$ do $L^{1,\infty}(X,\mu)$.

Innym ważnym narzędziem analizy harmonicznej jest *#-operator maksymalny* $M^{\#}$ zadany dla $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X,\mu)$ wzorem

$$M^{\#}f(x) = \sup_{B\ni x} \frac{1}{\mu(B)} \int_B \big|f - \langle f\rangle_B\big| \,\mathrm{d}\mu, \quad x \in X,$$

gdzie $\langle f\rangle_B = \frac{1}{\mu(B)} \int_B f \,\mathrm{d}\mu$ oznacza wartość średnią f po kuli B, a supremum jest brane po wszystkich kulach zawierających x. Alternatywnie rozważa się scentrowaną wersję operatora $M^{\#}$

$$M^{\#,c}f(x) = \sup_{0<r<\infty} \frac{1}{\mu\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} \big|f - \langle f\rangle_{B(x,r)}\big| \,\mathrm{d}\mu, \quad x \in X.$$

Tak jak w przypadku operatora H–L, również tu łatwo sprawdzić, że dla dowolnej $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X,\mu)$, funkcje $M^{\#}f$ i $M^{\#,c}f$ są dolnie półciągłe, a więc borelowskie.

Przestrzeń $BMO(X) := BMO(X,\mu)$ definiuje się jako przestrzeń funkcji o *ograniczonej średniej oscylacji*, tzn. funkcji $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X,\mu)$, dla których

$$\|f\|_* := \sup_{x\in X} M^{\#,c}f(x) < \infty.$$

Wielkość $\|\cdot\|_*$ jest półnormą, a po podzieleniu $BMO(X)$ przez podprzestrzeń funkcji stałych staje się normą, na dodatek zupełną w tejże przestrzeni ilorazowej. Piszemy ponownie $BMO(X)$ i $\|\cdot\|_*$ dla oznaczenia przestrzeni i normy ilorazowej; z kontekstu zwykle wynika, o którą z dwóch możliwości chodzi.

Oczywiście $M^{\#,c}f \leqslant M^{\#}f$, ale punktowa równoważność $M^{\#,c}f(x) \simeq M^{\#}f(x)$ na ogół nie zachodzi jednostajnie ze względu na $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X,\mu)$

i $x \in X$ (konwencja notacyjna: piszemy $S \simeq T$, jeśli $C^{-1}T \leqslant S \leqslant CT$ dla pewnej stałej $C \geqslant 1$, niezależnie od wszystkich możliwych zmiennych pojawiających się w wielkościach S i T). Jednakże równość

$$\sup_{x\in X} M^{\#,c} f(x) = \sup_{x\in X} M^{\#} f(x)$$

zachodzi dla każdej $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X,\mu)$, a ponadto

$$\|f\|_* = \sup_B \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f - \langle f\rangle_B| \,\mathrm{d}\mu \simeq \sup_B \inf_{c\in\mathbb{C}} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f - c| \,\mathrm{d}\mu.$$

Przestrzeń $BMO(X)$ jest przestrzenią dualną do *atomowej* przestrzeni Hardy'ego $H^1_{\mathrm{at}}(X)$ (patrz definicję na przykład w pracy [8]), a znaczenie obu przestrzeni – chociażby w euklidesowej analizie harmonicznej – jest nieocenione. Chyba najważniejszą własnością funkcji o ograniczonej średniej oscylacji jest to, że są one charakteryzowane przez oszacowanie Johna–Nirenberga.

Twierdzenie 4.3. *Niech (X,ρ,μ) będzie przestrzenią typu jednorodnego. Wówczas istnieją takie stałe $C_1, C_2 > 0$, że dla każdej funkcji $f \in BMO(X)$ i każdej kuli B*

$$\mu\big(\{x \in B : |f(x)-\langle f\rangle_B| > \lambda\}\big) \leqslant C_1 \exp\Big(-\frac{C_2}{\|f\|_*}\lambda\Big)\mu(B), \qquad \lambda > 0. \quad (8)$$

Dowód tego twierdzenia (które wcześniej znane było w sytuacji euklidesowej) ma swoją historię. Otóż jego prawdziwość dla przestrzeni typu jednorodnego anonsowana była już w artykule [8, stopka na str. 594]. Okazało się jednak, że podanie nie budzącego kontrowersji dowodu nie było łatwą sprawą. Stało się to udziałem wielu osób; patrz prace [15, str. 499–502; 21, str. 563–564], gdzie dowód twierdzenia 4.3 przeprowadzono nawet w większej ogólności oraz wskazano jeszcze dwa inne źródła. Oczywiście bez spełniania przez miarę warunku podwajania trudno oczekiwać, że własność Johna–Nirenberga pozostanie w mocy. Bardzo prosty przykład przestrzeni miarowo-metrycznej bez wspomnianej własności podany został w artykule [19].

Kolejnym pojęciem, jakie omówimy w tym paragrafie, będzie klasa wag A_p Muckenhoupta. Przez *wagę* (funkcję wagową) rozumiemy borelowsko mierzalną funkcję $w\colon X \to [0,\infty]$. Dla przestrzeni typu jednorodnego (X,ρ,μ) i $p \in [1,\infty)$ powiemy, że waga w *spełnia warunek A_p*, jeśli

$$\Big(\int_B w \,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p} \Big(\int_B w^{-p'/p} \,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p'} \leqslant C\mu(B), \qquad (9)$$

ze stałą $C > 0$ niezależną od dowolnej kuli B zawartej w X; p' oznacza tu wykładnik sprzężony do p, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (obowiązuje konwencja, że $0 \cdot \infty = 0$). Jeśli $p = 1$, to (9) rozumiemy jako

$$\int_B w \,\mathrm{d}\mu \cdot \operatorname*{ess\,sup}_{x\in B} \frac{1}{w(x)} \leqslant C\mu(B). \tag{10}$$

Dla w spełniającej warunek A_p piszemy $w \in A_p(X) := A_p(X, \mu)$. Nietrudno jest uzasadnić, że jeśli $w \in A_p(X)$, to może zajść dokładnie jedna z trzech możliwości: $w = 0$, $w = \infty$, $0 < w < \infty$ (μ-prawie wszędzie). Odrzucając dwa pierwsze „ekstremalne" przypadki możemy więc od razu zakładać, że $0 < w < \infty$; w szczególności oznacza to, że $w \in L^1_{\mathrm{loc}}(X, \mu)$.

Znaczenie klas A_p jest wyjaśnione między innymi twierdzeniem o ograniczoności operatora maksymalnego H–L na wagowych przestrzeniach L^p. Twierdzenie to zostało udowodnione przez Muckenhoupta dla $\mathbb{R}$ z miarą Lebesgue'a, uogólnione przez Coifmana i C. Feffermana na $\mathbb{R}^n$, gdzie $n \geqslant 2$, a następnie rozszerzone na przestrzenie typu jednorodnego spełniające pewien dodatkowy warunek (ciągłości miar kul o dowolnie ustalonym środku jako funkcji promienia) przez A. P. Calderóna w artykule [5]. To dodatkowe założenie zostało następnie wyeliminowane w pracy [1]. Elementarny i bardzo elegancki dowód tego twierdzenia (a w zasadzie tylko trudniejszej części mówiącej, że warunek A_p pociąga nierówność (11)) dla $p > 1$ można odczytać z pracy [18].

W dalszym ciągu pisząc $w \,\mathrm{d}\mu$ myślimy o mierze borelowskiej na X z gęstością w względem μ.

Twierdzenie 4.4. *Niech (X, ρ, μ) będzie przestrzenią typu jednorodnego i niech M będzie stowarzyszonym operatorem maksymalnym H–L. Dla $p \in (1, \infty)$, nierówność*

$$\|Mf\|_{L^p(w\,\mathrm{d}\mu)} \leqslant C_{p,w} \|f\|_{L^p(w\,\mathrm{d}\mu)}, \quad f \in L^p(w\,\mathrm{d}\mu), \tag{11}$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $w \in A_p(X)$. Dla $p = 1$ analogiczne stwierdzenie pozostaje prawdziwe z zamianą $L^p(w\,\mathrm{d}\mu)$ z lewej strony w (11) na $L^{1,\infty}(w\,\mathrm{d}\mu)$.

Następnym pojęciem, jakie omówimy, będzie pojęcie operatora Calderóna–Zygmunda (w dalszej części używamy skrótu C–Z). Niech $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$. Funkcję $K \colon X \times X \setminus \Delta \to \mathbb{C}$ nazywa się *jądrem standardowym*, jeśli istnieją takie stałe $\delta > 0$ i $C > 0$, że spełniony jest *warunek wzrostu*

$$|K(x, y)| \leqslant C \frac{1}{\mu(B(x, \rho(x, y)))}, \quad x, y \in X,\ x \neq y, \tag{12}$$

oraz *warunek gładkości*: dla x, x', y spełniających $\rho(x,y) > 2\rho(x,x')$, mamy

$$|K(x,y) - K(x',y)| + |K(y,x) - K(y,x')| \leqslant \\ \leqslant C\big(\tfrac{\rho(x,x')}{\rho(x,y)}\big)^{\delta} \frac{1}{\mu\big(B(x,\rho(x,y))\big)}; \quad (13)$$

można tu przyjąć, że $0 < \delta \leqslant 1$. Warunki (12) i (13) uogólniają klasyczne warunki z sytuacji euklidesowej, tzn. warunki (19) i (20) wzięte z $\tau = n$ (patrz książka [10, str. 99]). Liniowy operator T, określony i ograniczony na $L^2(X,\mu)$, który jest stowarzyszony z pewnym jądrem standardowym w sensie, że dla każdej funkcji $f \in L^2(X,\mu)$ ze zwartym nośnikiem,

$$Tf(x) = \int\limits_X K(x,y) f(y)\,\mathrm{d}\mu(y), \quad x \notin \operatorname{supp} f,$$

nazywa się operatorem C–Z. Centralne twierdzenie teorii takich operatorów brzmi następująco.

Twierdzenie 4.5. *Niech T będzie operatorem C–Z na przestrzeni typu jednorodnego (X,ρ,μ). Wówczas T rozszerza się do ograniczonego operatora z $L^1(X,\mathrm{d}\mu)$ do $L^{1,\infty}(X,\mathrm{d}\mu)$ i w konsekwencji przedłuża się do ograniczonego operatora na $L^p(X,\mathrm{d}\mu)$, gdzie $1 < p < \infty$. Ponadto, operator C–Z rozszerza się do ograniczonego operatora z $L^\infty(X,\mu)$ do $BMO(X,\mu)$, oraz z $H^1_{at}(X,\mu)$ do $L^1(X,\mu)$.*

Prekursorem operatora całkowania ułamkowego w przestrzeniach typu jednorodnego jest klasyczny operator (zwany również potencjałem Riesza rzędu α)

$$I_\alpha f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\|x-y\|^{n-\alpha}} f(y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

gdzie $0 < \alpha < n$, zdefiniowany na naturalnej dziedzinie tych wszystkich funkcji f, dla których powyższa całka jest zbieżna x-prawie wszędzie; na przykład, przestrzenie $L^p(\mathbb{R}^n)$, gdzie $p \in [1, n/\alpha)$, zawierają się w naturalnej dziedzinie. Ważność potencjału Riesza polega na tym, że z odpowiednią stałą $c_{\alpha,n}$,

$$(-\Delta)^{-\alpha/2} f = c_{\alpha,n} I_\alpha f, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

gdzie $\Delta = \sum_{j=1}^d \partial_j^2$ jest laplasjanem w $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, a ujemna potęga $(-\Delta)^{-\alpha/2}$ jest zdefiniowana na przestrzeni $L^2(\mathbb{R}^n)$ przy pomocy transformaty Fouriera.

Klasyczny rezultat dotyczący I_α mówi o *nierówności Hardy'ego–Littlewooda–Sobolewa* (patrz na przykład książka [10]): załóżmy, że

$0 < \alpha < n$, $p \in [1, \frac{n}{\alpha})$ i $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$; wówczas dla $p > 1$, zachodzi oszacowanie mocnego typu (p, q),

$$\|I_\alpha f\|_q \leqslant C\|f\|_p, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n), \tag{14}$$

podczas gdy dla $p = 1$ mamy oszacowanie słabego typu $(1, q)$,

$$\big|\{x \in \mathbb{R}^n : |I_\alpha f(x)| > \lambda\}\big| \leqslant C\Big(\frac{\|f\|_1}{\lambda}\Big)^q, \quad \lambda > 0,\ f \in L^1(\mathbb{R}^n). \tag{15}$$

W obu przypadkach, równość $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ jest *warunkiem koniecznym*, co łatwo sprawdzić rozpatrując w nierównościach (14) lub (15), wraz z jedną nietrywialną funkcją f, również jej dylatacje $\delta_r f$, gdzie $r \in (0, \infty)$ oraz $\delta_r f(x) = f(rx)$.

Uogólnianie pojęcia całkowania ułamkowego na przestrzenie typu jednorodnego poszło w (co najmniej) dwóch kierunkach. Otóż, dla przestrzeni (X, ρ, μ) z wielkością τ jako namiastką wymiaru, można przyjąć

$$I_\alpha f(x) = \int\limits_X \frac{f(y)}{\rho(x,y)^{\tau-\alpha}} \mathrm{d}\mu(y) \tag{16}$$

jako definicję operatora całkowania ułamkowego I_α, gdzie $\alpha \in (0, \tau)$, i jest to naturalny wybór. Jednak prześledzenie sposobu, w jaki warunki wzrostu i gładkości zostały zaadaptowane z sytuacji euklidesowej do sytuacji przestrzeni (X, ρ, μ), pozwala zaproponować alternatywną definicję:

$$\hat{I}_\alpha f(x) = \int\limits_X f(y) \frac{\rho(x,y)^\alpha}{\mu\big(B(x, \rho(x,y))\big)} \mathrm{d}\mu(y), \tag{17}$$

gdzie $\alpha > 0$. Obie definicje pojawiły się w literaturze, a odpowiadające im operatory były i są do dziś intensywnie badane. Jeśli chodzi o operator I_α zdefiniowany wzorem (16), to można by pomyśleć o zawężeniu rozważań do przestrzeni spełniających warunek Ahlforsa, gdzie wielkość τ rzeczywiście kojarzyć należy z wymiarem. Zaskakujący jest fakt, że taka próba definicji została podjęta tylko w pewnym zakresie, mianowicie przy założeniu $\tau = 1$. O szczegółach ewolucji tego pojęcia można dowiedzieć się z przeglądowego artykułu [17]. Z biegiem czasu okazało się, że do uzyskania oszacowań $L^p - L^q$ dla operatorów całkowania ułamkowego warunek podwajania nie jest konieczny i można go zastąpić warunkami zawierającymi wyłącznie oszacowania (z dołu bądź z góry) na miary kul w zależności od promienia. Wobec tego dalszą dyskusję tego tematu odkładamy do kolejnego paragrafu. Zauważmy tylko, że jeśli miara μ

spełnia warunek $\mu(B(x,r)) \leqslant Cr^{\tau}$ przy $r > 0$, to dla $\alpha \in (0,\tau)$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{\rho(x,y)^{\tau-\alpha}} \leqslant C\frac{\rho(x,y)^{\alpha}}{\mu(B(x,\rho(x,y)))},$$

a więc oszacowania $L^p - L^q$ uzyskane dla $\hat{I}_\alpha$ implikują analogiczne rezultaty dla I_α. I na odwrót, jeśli miara μ spełnia warunek $\mu(B(x,r)) \geqslant Cr^{\tau}$, to dla $\alpha \in (0,\tau)$ zachodzi nierówność

$$\frac{\rho(x,y)^{\alpha}}{\mu(B(x,\rho(x,y)))} \leqslant C\frac{1}{\rho(x,y)^{\tau-\alpha}},$$

a więc oszacowania $L^p - L^q$ (a nawet ogólniej, $L^p - L^{q,\infty}$) uzyskane dla I_α implikują analogiczne rezultaty dla $\hat{I}_\alpha$.

5. Przestrzenie miarowo-metryczne

Rozpoczniemy od następującej definicji.

Definicja 5.1. Trójkę (X,d,μ), gdzie (X,d) jest przestrzenią metryczną, a μ jest taką miarą borelowską na X, że $\mu(B) < \infty$ dla każdej kuli B, nazywamy *przestrzenią miarowo-metryczną*. Jeśli dodatkowo μ spełnia warunek podwajania, to mówimy o przestrzeni miarowo-metrycznej *z warunkiem podwajania*.

Zauważmy, że quasi-metrykę zastąpiła metryka, od miary nie jest wymagany warunek podwajania, oraz – podobnie jak przy definicji przestrzeni typu jednorodnego – tu również nie deklarujemy jakiejkolwiek regularności miary μ, zupełności metryki d lub lokalnej zwartości przestrzeni X. Nie zakładamy także warunku $\mu(B) > 0$ dla każdej kuli B, choć w sytuacjach, gdzie takie założenie jest niezbędne (na przykład przy rozważaniu operatorów maksymalnych i przestrzeni BMO) milcząco przyjmujemy, że tak właśnie jest. Interesujące informacje o analizie uprawianej na przestrzeniach miarowo-metrycznych można znaleźć w podręczniku [13] i w artykule przeglądowym [14].

Brak warunku podwajania ma swoje natychmiastowe konsekwencje. Dla przykładu, w pełnej ogólności porównywalność $M^c f \simeq Mf$, jednostajnie ze względu na $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X,\mu)$, nie ma miejsca. Ponadto operator maksymalny M (a nawet M^c) może nie być słabego typu $(1,1)$.

Definicje obiektów z poprzedniego paragrafu (definicje operatorów maksymalnych, przestrzeni BMO, klas A_p, operatora całkowania ułamkowego) pozostają niezmienione (i mają sens) również w kontekście przestrzeni miarowo-metrycznych. Natomiast kwestia udowodnienia dla tychże obiektów twierdzeń analogicznych do wzmiankowanych wcześniej jest osobną historią. Przez długi czas wierzono, że warunek podwajania jest niezbędny do uzyskania satysfakcjonujących rezultatów na odpowiednio wysokim poziomie ogólności. Niespodziankę przyniosły wspomniane we wstępie prace [23] oraz [31], gdzie wykazano, że warunek podwajania można zastąpić nieco innym warunkiem, mianowicie warunkiem wzrostu miary na kulach,

$$\mu(B(x,r)) \leqslant D_\mu r^\tau, \tag{18}$$

gdzie τ jest ustalonym parametrem, a $D_\mu > 0$ jest stałą niezależną od $x \in X$ i $r > 0$. O mierze μ spełniającej warunek (18) mówi się, że jest τ-wymiarowa.

Tak naprawdę, w artykułach [23, 31] oraz w kolejnych pracach tych autorów (na przykład [24, 32]), rozważano przestrzeń $\mathbb{R}^n$ lub jej otwarty podzbiór z miarą o własności (18) przy pewnym $\tau \in (0, n]$. Zakładano tam również, że μ jest miarą Radona. Zauważmy jednak, że na mocy ogólnego twierdzenia, każda miara borelowska na $\mathbb{R}^n$, która jest skończona na zbiorach zwartych, jest miarą Radona. Pojęcie operatora C–Z jest tu następujące. *Jądrem standardowym* nazywać będziemy odwzorowanie $K\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \Delta \to \mathbb{C}$, dla którego istnieją takie stałe $\delta \in (0,1]$ i $C > 0$, że spełniony jest *warunek wzrostu*

$$|K(x,y)| \leqslant C\frac{1}{\|x-y\|^\tau}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,\ x \neq y, \tag{19}$$

oraz *warunek gładkości*: dla takich x, x', y, że $\|x-y\| > 2\|x-x'\|$, zachodzi nierówność

$$|K(x,y) - K(x',y)| + |K(y,x) - K(y,x')| \leqslant C\frac{\|x-x'\|^\delta}{\|x-y\|^{\tau+\delta}}. \tag{20}$$

Operator C–Z to liniowy operator T, określony i ograniczony na przestrzeni $L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$, który jest stowarzyszony (w sensie podanym wcześniej) z pewnym jądrem standardowym. Choć zbudowana teoria posiadała własności klasycznej teorii (z miarą dublującą), to jednak okazało się, że tradycyjna definicja przestrzeni BMO nie jest właściwa, gdyż operatory C–Z w powyższym sensie na ogół nie przeprowadzają $L^\infty(\mu)$ w $BMO(X, \mu)$ w sposób ciągły. W pracy [32] Tolsa zaproponował obejście tej niedogodności poprzez zdefiniowanie *regularyzowanej* przestrzeni BMO, oznaczanej od tej pory jako $RBMO$, która kwestionowane własności już posiada. Interesujące omówienie tematu związanego z możliwością zbudowania satysfakcjonującej teorii operatorów C–Z bez warunku podwajania można znaleźć w pracy [33] (z dramatycznie brzmiącym tytułem).

Komentarz dopuszczający możliwość uogólnień zbudowanej teorii operatorów C–Z na przestrzenie miarowo-metryczne z warunkiem (18) pojawił się w artykule [24, str. 153]; okazało się jednak, że takie uogólnienie nie jest sprawą łatwą. Niedawno Hytönen w pracy [15] zaproponował satysfakcjonujące rozwiązanie problemu poprzez wprowadzenie pojęcia *górnego podwajania*. Otóż mówimy, że miara borelowska μ na przestrzeni metrycznej (X,μ) spełnia *warunek górnego podwajania*, jeśli istnieją *funkcja dominująca* $\lambda\colon X \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ i stała C_λ o własnościach: dla każdego $x \in X$ funkcja $r \mapsto \lambda(x,r)$ jest słabo rosnąca, a dla każdego $x \in X$ i $r > 0$, zachodzą oszacowania

$$\mu(B(x,r)) \leqslant \lambda(x,r) \leqslant C_\lambda \lambda(x,r/2).$$

Oczywiście, każda przestrzeń typu jednorodnego jest przestrzenią z górnym dublowaniem, gdyż za funkcję dominującą można przyjąć $\lambda(x,r) \coloneqq \mu(B(x,r))$. Ponadto każda przestrzeń miarowo-metryczna z miarą spełniającą warunek (18) też jest przestrzenią z górnym dublowaniem, jeśli przyjmiemy $\lambda(x,r) \coloneqq D_\mu r^\tau$.

W pracy [16] rozważano ośrodkową przestrzeń miarowo-metryczną (X,d,μ) zakładając dodatkowo o mierze μ, że spełnia warunek górnego podwajania i geometryczny warunek podwajania oraz jest bezatomowa, tzn. $\mu(\{x\}) = 0$ dla każdego $x \in X$. Zauważmy w tym miejscu, że jeśli miara μ spełnia warunek (18), to jest bezatomowa. Przy powyższych założeniach wykazano, że wszystkie istotne rezultaty klasycznej teorii operatorów C–Z pozostają w mocy. W szczególności, rezultaty twierdzeń 1.1 i 10.1 z pracy [23] uogólniają się z sytuacji $\mathbb{R}^n$ z miarą spełniającą oszacowanie (18) na sytuację (niemal) ogólnej przestrzeni miarowo-metrycznej z miarą jak wyżej. W pewnym sensie analogiczne rezultaty zostały równolegle wykazane w artykule [4].

Prace [23] oraz [31] zainicjowały dalsze badania nad możliwością wyeliminowania warunku podwajania z wielu teorii. I tak, w artykułach [21, 27] rozważano sytuację przestrzeni miarowo-metrycznej $\mathbb{R}^n$ z miarą borelowską i metryką d_2 lub d_∞. Głównym obiektem badań w pracy [21] była przestrzeń *BMO* zdefiniowana w tradycyjny sposób. Przy pewnych dodatkowych założeniach na miarę μ, geometrycznej natury, wykazano, że dla funkcji z *BMO* ma miejsce nierówność Johna–Nirenberga (8), natomiast w artykule [27] udowodniono odpowiednik twierdzenia Muckenhoupta dla scentrowanego operatora H–L.

Przechodząc do dyskusji operatorów całkowania ułamkowego na przestrzeni miarowo-metrycznej (X,d,μ) przytoczmy następujący rezultat dla $\hat{I}_\alpha$ (w pracy [2] jest on udowodniony nawet w wersji wagowej, tzn. z zamianą μ na $w\,\mathrm{d}\mu$, gdzie w jest stosowną wagą – patrz także artykuł [20]).

Twierdzenie 5.1. *Niech (X,ρ,μ) będzie przestrzenią typu jednorodnego, z miarą spełniającą warunek $r^\tau \leqslant C\mu(B(x,r))$ dla pewnego $\tau > 0$ ze stałą $C > 0$ niezależną od $x \in X$ i $r > 0$. Wówczas, dla $p \in (1, \frac{\tau}{\alpha})$ oraz q spełniającego warunek $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\tau}$, ma miejsce oszacowanie*

$$\|\hat{I}_\alpha f\|_{L^q(X,\mu)} \leqslant C\|f\|_{L^p(X,\mu)}, \quad f \in L^p(X,\mu).$$

García-Cuerva i Gatto zbadali w pracy [12] operator całkowania ułamkowego w środowisku przestrzeni miarowo-metrycznej (X,d,μ) z miarą spełniającą warunek (18). Jak wspomnieliśmy, parametr τ pełni tam rolę wymiaru. Dla $\alpha \in (0,\tau)$ operator ten jest zdefiniowany, na odpowiednich funkcjach f, wzorem

$$I_\alpha f(x) = \int_X \frac{f(y)}{d(x,y)^{\tau-\alpha}}\,\mathrm{d}\mu(y). \tag{21}$$

Autorzy wykazali, że dla $p \in [1, \frac{\tau}{\alpha})$ oraz q spełniającego równość $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\tau}$ mają miejsce odpowiedniki oszacowań (14) i (15) z zamianą $(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}x)$ na (X,μ) oraz normy $\|\cdot\|_p$ na $\|\cdot\|_{L^p(X,\mu)}$ (patrz [12, Theorem 3.2, Corollary 3.3]). Analogiczne rezultaty pozostają w mocy, jeśli zamiast I_α rozważymy operator całkowy z jądrem $K_\alpha(x,y)$ spełniającym oszacowanie $|K_\alpha(x,y)| \leqslant \frac{C}{d(x,y)^{\tau-\alpha}}$. Jest to o tyle istotne, że w sytuacji kiedy mamy do czynienia z „laplasjanem", ważnym z punktu widzenia analizy harmonicznej zagadnieniem jest badanie jego ujemnych potęg. Trudno oczekiwać, by jądro całkowe takiego operatora miało wówczas postać jak we wzorze (21), ale zdarza się, że wspomniane oszacowanie na jądro jest spełnione. Warto również dodać, że ogólnie, ze względu na brak argumentu dylatacyjnego, nie ma powodu, aby sztywny związek postaci $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\tau}$ pozostawał warunkiem koniecznym dla oszacowań typu $L^p - L^q$ przy rozpatrywaniu ujemnych potęg „laplasjanu".

Ciekawym spostrzeżeniem jest fakt, że jeśli μ jest bezatomowa, to warunek (18) jest niezbędny, aby odpowiedniki oszacowań (14) i (15) zachodziły dla I_α określonego wzorem (21), przy parametrach α i τ oraz wykładnikach p i q spełniających stosowne warunki (patrz [12, Theorem 3.4]). Rzeczywiście, zakładając spełnienie odpowiednika oszacowania (14) (z nierównością (15) postępujemy podobnie), weźmy kulę $B = B(x_0, r)$ o promieniu $r > 0$. Jeśli $\mu(B) = 0$, to oczywiście warunek (18) jest spełniony. Jeśli natomiast $\mu(B) \neq 0$, to dla każdego $x \in B$

mamy

$$I_\alpha \chi_B(x) = \int\limits_B \frac{1}{d(x,y)^{\tau-\alpha}} \mathrm{d}\mu(y) \geqslant \frac{1}{(2r)^{\tau-\alpha}} \mu(B).$$

Wobec tego, wykorzystując nierówność (14) otrzymujemy

$$\frac{1}{(2r)^{\tau-\alpha}} \mu(B)^{1+\frac{1}{q}} \leqslant \Big(\int\limits_B |I_\alpha \chi_B(x)|^q \, \mathrm{d}\mu(x) \Big)^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant C \|\chi_B\|_{L^p(X,\mu)} = C\mu(B)^{1/p}.$$

Związek $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\tau}$ implikuje zatem warunek (18).

6. Analiza na przestrzeni z miarą gaussowską

Przykładem miary, która spełnia warunek wzrostu (18) – nawiasem mówiąc, dla każdego $\tau \in (0, n]$ – ale nie spełnia warunku podwajania (3) jest miara gaussowska

$$\mathrm{d}\gamma(x) := \pi^{-n/2} e^{-\|x\|^2} \, \mathrm{d}x,$$

określona na $\mathbb{R}^n$, gdzie $\|\cdot\| := \|\cdot\|_2$ jest normą euklidesową. Wobec tego $(\mathbb{R}^n, d, \gamma)$, gdzie $d := d_2$ lub $d := d_\infty$, jest przestrzenią miarowo-metryczną, skończoną, przy czym $\gamma(\mathbb{R}^n) = 1$. Ważność tej przestrzeni polega na tym, że jest ona naturalnym środowiskiem dla *operatora Ornsteina–Uhlenbecka*,

$$L = -\tfrac{1}{2}\Delta + x \cdot \nabla,$$

pełniącego rolę „laplasjanu". Jest to operator symetryczny w $L^2(\gamma)$,

$$\langle Lf, g \rangle_{L^2(\gamma)} = \langle f, Lg \rangle_{L^2(\gamma)}, \quad f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

a jego samosprzężone rozszerzenie $\mathcal{L}$ realizuje się przy pomocy wielowymiarowych wielomianów Hermite'a.

Półgrupa $\{e^{-t\mathcal{L}}\}_{t \geqslant 0}$ generowana przez $\mathcal{L}$ nosi nazwę *półgrupy Ornsteina–Uhlenbecka* (lub półgrupy ciepła dla $\mathcal{L}$). Zainteresowanie nią nasiliło się od czasów odkrycia przez Nelsona w latach sześćdziesiątych ubiegłego wieku, że posiada ona własność hiperkontraktywności. W ostatnich latach wielu autorów intensywnie badało środowisko związane z operatorem $\mathcal{L}$, ze szczególnym uwzględnieniem badania operatora maksymalnego związanego z półgrupą ciepła, transformat Riesza oraz rachunku funkcjonalnego dla $\mathcal{L}$ (patrz cytowania w pracy [22]). Ze względu na specyficzne geometryczne własności miary gaussowskiej, analiza związana z wymienionymi obiektami jest całkowicie odmienna od tej dla analogicznych obiektów w klasycznym euklidesowym ujęciu.

Ponieważ przestrzeń $(\mathbb{R}^n, d, \gamma)$ spełnia warunek (18), więc podpada pod teorię operatorów C–Z omówioną w paragrafie 5. Mogłoby się zatem wydawać, że teoria C–Z związana z operatorem Ornsteina–Uhlenbecka powinna być oparta na wynikach wspomnianej wcześniej ogólnej teorii. Tak jednak nie jest. Główną przyczyną tego stanu rzeczy jest fakt, że jądra operatorów singularnych pojawiające się przy badaniach operatora Ornsteina–Uhlenbecka, takich jak na przykład transformaty Riesza, nie spełniają postulatów (19) i (20) dla jądra standardowego w ogólnej teorii. W odpowiedzi na powstałą trudność Mauceri i Meda zbudowali w pracy [22] teorię operatorów C–Z ściśle powiązaną ze specyfiką przestrzeni $(\mathbb{R}^n, d, \gamma)$. Wiązało się to również z nowymi konstrukcjami przestrzeni $BMO(\gamma)$ i $H^1_{\text{at}}(\gamma)$, innymi niż tradycyjne przestrzenie BMO (lub $RBMO$ Tolsy) i Hardy'ego z paragrafu 5.

Ciekawym zagadnieniem, niewątpliwie wartym omówienia, jest kwestia oszacowań dla operatorów maksymalnych związanych z miarą γ. Otóż wiadomo (patrz komentarz w artykule [29]), że w jednym wymiarze, gdy $n = 1$, operator $M_{\gamma,d}$ (piszemy indeksy przy M dla podkreślenia, z jaką miarą i metryką związany jest operator maksymalny) spełnia oszacowanie słabego typu $(1, 1)$, a więc również jest operatorem ograniczonym na $L^p(\gamma)$, gdzie $p \in (1, \infty]$. Ta sama teza jest prawdziwa dla scentrowanego operatora $M^c_{\gamma,d}$, ale już dla dowolnego $n \geqslant 1$ – jest to konsekwencją lematu pokryciowego Besikowicza (patrz książka [10, str. 44]). Natomiast operator niescentrowany $M_{\gamma,d}$, jak wykazał Sjögren w artykule [29], że dla $n \geqslant 2$ nie jest on słabego typu $(1, 1)$, niemniej jednak później okazało się, że $M_{\gamma,d}$ jest ograniczony na każdym $L^p(\gamma)$, gdzie $p > 1$, dla $n \geqslant 2$ (patrz praca [11]). Na marginesie: gdy $d = d_\infty$, to ograniczoność $M_{\gamma,d}$ na $L^p(\gamma)$ dla $p > 1$ i $n \geqslant 2$ jest konsekwencją wyniku jednowymiarowego przez proste iteracje.

Przykład przestrzeni $(\mathbb{R}^n, d, \gamma)$ pokazuje, że teoria operatorów C–Z zainicjowana w artykułach [23] oraz [31], choć mająca zastosowania w wielu miejscach, w których teoria przestrzeni typu jednorodnego nie jest stosowalna, ciągle nie jest teorią uniwersalną. Nie jest jednak jasne, czy taka uniwersalna teoria może w ogóle powstać.

7. Zasada redukcji

Tak jak zostało powiedziane wcześniej, pokażemy, że w wielu sytuacjach rezultat udowodniony dla przestrzeni miarowo-metrycznych spełniających warunek podwajania implikuje analogiczny rezultat dla przestrzeni typu jednorodnego. Nie należy jednak wyciągać stąd mylnego wniosku, że teoria przestrzeni typu jednorodnego jest zbędna.

Potrzebny nam będzie następujący prosty fakt.

Lemat 7.1. *Jeżeli* (X, ρ, μ) *jest przestrzenią typu jednorodnego oraz* p *i* d_p *są takie, jak w twierdzeniu* 2.1, *to* (X, d_p, μ) *jest przestrzenią miarowo-metryczną z warunkiem podwajania. Ponadto,*

$$\mu(B_\rho(x, r^{1/p})) \simeq \mu(B_{d_p}(x, r)), \quad x \in X, \ r > 0. \tag{22}$$

Dowód. Sprawdzimy, że μ jest dublująca również dla kul pochodzących od metryki d_p (piszemy indeksy przy kulach dla podkreślenia, od jakiej quasi-metryki bądź metryki pochodzą; analogiczna zasada obowiązuje również dla innych obiektów, na przykład dla operatorów maksymalnych). W tym celu zauważmy, że nierówność $d_p \leqslant \rho^p \leqslant 4d_p$ implikuje zawierania

$$B_\rho(x, r) \subset B_{d_p}(x, r^p) \subset B_\rho(x, 4^{1/p} r), \tag{23}$$

a zatem

$$\mu\big(B_{d_p}(x, 2r)\big) \leqslant \mu\big(B_\rho(x, (8r)^{1/p})\big) \leqslant C_{\mu, 8^{1/p}} \mu\big(B_\rho(x, r^{1/p})\big) \leqslant \\ \leqslant C_{\mu, 8^{1/p}} \mu\big(B_{d_p}(x, r)\big),$$

gdzie $C_{\mu, 8^{1/p}}$ jest stałą występującą w nierówności (4). Przy okazji okazało się, że $\mu(B_{d_p}(x, r)) < \infty$ dla dowolnej kuli $B_{d_p}(x, r)$. Równoważność (22) jest konsekwencją zawierań (23) oraz własności (4). □

Warunek trójkąta ze stałą $K > 1$ w definicji quasi-metryki powoduje pewne komplikacje w rozumowaniach związanych z obiektami przestrzeni typu jednorodnego. W pewnej skali można to było zaobserwować w dowodzie lematu pokryciowego. Twierdzenie 2.1 (a tak naprawdę, to wynikający z niego lemat 7.1) pozwala natomiast w wielu sytuacjach redukować rozumowania do przypadku $K = 1$ (a więc sytuacji metryki). Można nawet pokusić się o sformułowanie następującej *zasady meta-matematycznej*: jeśli pewne twierdzenie dotyczące ustalonego obiektu zachodzi dla przestrzeni miarowo-metrycznych z warunkiem podwajania, to analogiczne twierdzenie zachodzi również w szerszym kontekście przestrzeni typu jednorodnego.

Działanie powyższej zasady zobaczymy na kilku przykładach, a jeszcze inny przykład można znaleźć w pracy [30]. W dalszym ciągu (X, ρ, μ) jest przestrzenią typu jednorodnego, a p i d_p są takie, jak w twierdzeniu 2.1.

Przykłady. 1. *Twierdzenie o słabym typie* $(1, 1)$ *dla operatora maksymalnego* M. Zakładając, że rozważane twierdzenie zachodzi dla przestrzeni miarowo-metrycznych z miarą dublującą rozumujemy w sposób następujący. Ponieważ $M_\rho = M_{\rho^p}$ (rodziny kul odpowiadające quasi-metrykom

ρ i ρ^p są identyczne) oraz $M_{\rho^p} \simeq M_{d_p}$ (gdyż $\rho^p \simeq d_p$), więc słaby typ $(1,1)$ dla M_{d_p} przekłada się na słaby typ dla M_{ρ^p}, a więc również dla M_ρ.

2. *Twierdzenie Muckenhoupta.* Zauważmy najpierw, że klasy A_p odpowiadające przestrzeniom (X, ρ, μ) oraz (X, d_p, μ) są identyczne: widać to łatwo, biorąc pod uwagę kształt warunków (9) i (10), zawierania (23) oraz własność (22). (Uwaga: ma tu miejsce konflikt oznaczeń, z którego trudno wybrnąć; pamiętajmy zatem, że p przy A_p i d_p, to nie związane ze sobą parametry, z których pierwszy jest nie mniejszy, a drugi nie większy od 1.) Weźmy teraz $w \in A_p(X, \rho, \mu)$. Z tego, co powiedzieliśmy, mamy również $w \in A_p(X, d_p, \mu)$, a więc oszacowanie (11) zachodzi, gdy zamiast M wstawimy M_{d_p}. Wobec $M_{\rho^p} \simeq M_{d_p}$, to samo oszacowanie jest spełnione dla $M_\rho = M_{\rho^p}$. Uzasadniliśmy więc, że jeśli warunek (11) (myślimy o $p > 1$, przypadek $p = 1$ traktuje się analogicznie) zachodzi w kontekście przestrzeni miarowo-metrycznych z warunkiem podwajania, to również pozostaje prawdziwy dla przestrzeni typu jednorodnego. Tak naprawdę, zajmowaliśmy się tylko dostatecznością w twierdzeniu 4.4 – argument dotyczący konieczności jest bardzo podobny.

3. *Twierdzenie o ograniczoności operatorów C–Z.* Wystarczy wykazać, że jądro standardowe K spełniające warunki wzrostu i gładkości (12) i (13) z kulami związanymi z ρ spełnia te same warunki z kulami związanymi z d_p, a więc z zamianą symbolu ρ na d_p w (12) i (13) oraz ewentualną zmianą parametru δ. Dla warunku wzrostu tak jest, gdyż na mocy równoważności (22) oraz $d_p \leqslant \rho^p \leqslant 4d_p$, mamy

$$\mu(B_\rho(x, \rho(x,y))) \geqslant C\mu(B_{d_p}(x, \rho(x,y)^p)) \geqslant C\mu(B_{d_p}(x, d_p(x,y))). \quad (24)$$

Dla warunku gładkości, korzystając znów z nierówności $d_p \leqslant \rho^p \leqslant 4d_p$, otrzymamy

$$\frac{\rho(x,x')}{\rho(x,y)} \leqslant 4^{1/p}\Big(\frac{d_p(x,x')}{d_p(x,y)}\Big)^{1/p}.$$

Warunek gładkości jest zatem spełniony dla kul stowarzyszonych z d_p, z zamianą parametru δ na δ/p. Wypada jeszcze zauważyć, że spełnienie warunku $\rho(x,y) > 2\rho(x,x')$ pociąga za sobą nierówności

$$d_p(x,y) \geqslant \tfrac{1}{4}\rho(x,y)^p > \tfrac{1}{4}2^p\rho(x,x')^p \geqslant \tfrac{2^p}{4}d_p(x,x') > \tfrac{1}{4}d_p(x,x'),$$

a zatem nowy warunek gładkości jest tym bardziej spełniony z warunkiem $d_p(x,y) > 2d_p(x,x')$.

4. *Twierdzenie o oszacowaniach dla operatorów całkowania ułamkowego.* Przede wszystkim zauważmy, że jeśli miara μ spełnia nierówność $\mu(B_\rho(x,r)) \leqslant Cr^\tau$ (odpowiednio, $\geqslant Cr^\tau$), to również $\mu(B_{d_p}(x,r)) \leqslant Cr^\tau$ (odpowiednio, $\geqslant Cr^{\tau/p}$). Dalej wystarczy pokazać, że jądro całkowe

operatora I_α lub $\hat{I}_\alpha$ jest dominowane przez analogiczne jądro całkowe z zamianą ρ na d_p, gdy rozważamy I_α oraz dodatkowo z zamianą kul związanych z ρ na kule odpowiadające d_p, gdy rozważamy $\hat{I}_\alpha$; oczywiście parametr τ może również ulec zmianie. W przypadku I_α sprawa jest oczywista, gdyż

$$\frac{1}{\rho(x,y)^{\tau-\alpha}} \leqslant C\frac{1}{d_p(x,y)^{\frac{\tau}{p}-\frac{\alpha}{p}}}.$$

Natomiast w przypadku $\hat{I}_\alpha$, jeśli μ spełnia warunek $\mu(B_\rho(x,r)) \geqslant Cr^\tau$, to na mocy nierówności (24) mamy

$$\frac{\rho(x,y)^\alpha}{\mu(B_\rho(x,\rho(x,y)))} \leqslant C\frac{d_p(x,y)^{\frac{\alpha}{p}}}{\mu(B_{d_p}(x,d_p(x,y)))}.$$

Podziękowania

Niniejsza praca została sfinansowana środkami zlecenia statutowego nr S10088 zrealizowanego w Instytucie Matematyki i Informatyki Politechniki Wrocławskiej. Dziękuję dr. hab. Adamowi Nowakowi za lekturę końcowej wersji tego artykułu i wniesienie cennych uwag.

Bibliografia

[1] H. Aimar, R. A. Macías, *Weighted norm inequalities for the Hardy–Littlewood maximal operator on spaces of homogeneous type*, Proc. Amer. Math. Soc. 91 (1984), 213–216.

[2] P. Auscher, J. M. Martell, *Weighted norm inequalities for fractional operators*, Indiana Univ. Math. J. 57 (2008), 1845–1870.

[3] J. J. Betancor, A. J. Castro, A. Nowak, *Calderón–Zygmund operators in the Bessel setting*, Monatsh. Math. 167 (2012), 375–403.

[4] T. A. Bui, X. T. Duong, *Hardy spaces, regularized BMO spaces and the boundedness of Calderón–Zygmund operators on non-homogeneous spaces*, J. Geom. Anal. 23 (2013), nr 2, 895–932.

[5] A. P. Calderón, *Inequalities for the maximal function relative to a metric*, Studia Math. 57 (1976), 297–306.

[6] M. Christ, *Lectures on Singular Integral Operators*, CBMS Reg. Conf. Ser. Math., t. 77, AMS, Providence, Rhode Island 1990.

[7] R. R. Coifman, G. Weiss, *Analyse Harmonique Non-Commutative sur Certains Espaces Homogénes*, t. 242, Springer-Verlag, Berlin and New York 1971, Lecture Notes in Math.

[8] R. R. Coifman, G. Weiss, *Extensions of Hardy spaces and their use in analysis*, Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977), 569–645.

[9] D. Deng, Y. Han, *Harmonic Analysis on Spaces of Homogeneous Type*, t. 1966, Springer-Verlag, Berlin and New York 2009, Lecture Notes in Math.

[10] J. Duoandikoetxea, *Fourier Analysis*, Graduate Studies in Mathematics, t. 29, AMS 2001.

[11] L. Forzani, R. Scotto, P. Sjögren, W. Urbina, *On the L^p boundedness of the non-centered Gaussian Hardy–Littlewood maximal function*, Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2001), 73–79.

[12] J. García-Cuerva, A. E. Gatto, *Boundedness properties of fractional integral operators associated to non-doubling measures*, Studia Math. 162 (2004), 245–261.

[13] J. Heinonen, *Lectures on analysis on metric spaces*, Universitext, Springer 2001.

[14] J. Heinonen, *Nonsmooth calculus*, Bull. Amer. Math. Soc. 44 (2007), 163–262.

[15] T. Hytönen, *A framework for non-homogeneous analysis on metric spaces, and the RBMO space of Tolsa*, Publ. Mat. 54 (2010), 485–504.

[16] T. Hytönen, S. Liu, D. Yang, D. Yang, *Boundedness of Calderón–Zygmund operators on non-homogeneous metric measure spaces*, Canadian J. Mat. 64 (2012), 892–923.

[17] A. Korányi, *The work of Stephen Vági*, Contemporary Mathematics 411 (2003), 1–14.

[18] A. K. Lerner, *An elementary approach to several results on the Hardy–Littlewood maximal operator*, Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008), 2829–2833.

[19] C.-C. Lin, K. Stempak, Y.-S. Wang, *Local maximal operators on measure metric spaces*, Publ. Mat. 57 (2013), 239–264.

[20] J. M. Martell, *Fractional integrals, potential operators, and two-weight, weak type norm inequalities on spaces of homogeneous type*, J. Math. Anal. Appl. 294 (2004), 223–236.

[21] J. Mateu, P. Matilla, A. Nicolau, J. Orobitg, *BMO for nondoubling measures*, Duke Math. J. 102 (2000), 533–565.

[22] G. Mauceri, S. Meda, *BMO and H^1 for the Ornstein–Uhlenbeck operator*, J. Funct. Anal. 252 (2007), 278–313.

[23] F. Nazarov, S. Treil, A. Volberg, *Cauchy integral and Calderón–Zygmund operators on nonhomogeneous spaces*, Internat. Math. Res. Notices 15 (1997), 703–726.

[24] F. Nazarov, S. Treil, A. Volberg, *The Tb-theorem on nonhomogeneous spaces*, Acta Math. 190 (2003), 151–239.

[25] A. Nowak, P. Sjögren, *Calderón–Zygmund operators related to Jacobi, expansions*, J. Fourier Anal. Appl. 18 (2012), 717–749.

[26] A. Nowak, K. Stempak, *Riesz transforms for the Dunkl harmonic oscillator*, Math. Z. 262 (2009), 539–556.

[27] J. Orobitg, C. Pérez, *A_p weights for nondoubling measures in $\mathbb{R}^n$ and applications*, Trans. Amer. Math. Soc. 354 (2002), 2013–2033.

[28] M. Paluszyński, K. Stempak, *On quasi-metric and metric spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 137 (2009), 4307–4312.

[29] P. Sjögren, *A remark on the maximal function for measures in* $\mathbb{R}^n$, Amer. J. Math. 105 (1983), 1231–1233.
[30] K. Stempak, *On quasi-metric measure spaces* (2013), preprint.
[31] X. Tolsa, *L^2-boundedness of the Cauchy integral operator for continuous measures*, Duke Math. J. 98 (1999), 269–304.
[32] X. Tolsa, *BMO, H^1, and Calderón–Zygmund operators for non doubling measures*, Math. Ann. 319 (2001), 89–149.
[33] J. Verdera, *The fall of the doubling condition in Calderón–Zygmund theory*, [w:] Publ. Mat. Proceedings of the 6th International Conference on Harmonic Analysis and Partial Differential Equations, El Escorial 2000, 2002.

Krzysztof Stempak
Instytut Matematyki i Informatyki
Politechniki Wrocławskiej
`krzysztof.stempak@pwr.wroc.pl`