

## Egzamin z analizy -część teoret. (przykładowe odpowiedzi)

(20.09.2012)

(Iloczyn skalarny oznaczam tu symbolem  $\circ$ , w punkcie 2. zamiast  $\langle u, v \rangle$ )

1. Jeśli  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  jest krzywą klasy  $C^1$ , przy czym  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t_1, \dots, t_n$ , są punktami podziału odcinka  $[a, b]$ , oznaczmy przez  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  pewien układ punktów pośrednich  $\lambda_j \in [t_{j-1}, t_j]$  oraz przez  $\Delta_j \gamma = \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})$  -wektor cięciwy dla łuku  $\{\gamma(t) : t \in [t_{j-1}, t_j]\}$ . Napisać postać sumy całkowej przybliżającej całkę skierowaną  $\int_\gamma P dx + Q dy$  (czyli cyrkulację wzdłuż  $\gamma$  dla pola wektorowego  $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  określonego w punktach (o współrzędnych  $(x, y)$ ) leżących na tej krzywej.

$$S_n = \sum_{j=1}^n \vec{F}(\gamma(\lambda_j)) \circ \Delta_j \gamma \quad (= \sum_{j=1}^n P(x(\lambda_j), y(\lambda_j))(x(t_j) - x(t_{j-1})) + Q(x(\lambda_j), y(\lambda_j))(y(t_j) - y(t_{j-1})))$$

2. Sformułować nierówność Cauchy'ego-Buniakowskiego-Schwarza (= pewna nierówność dla iloczynu skalarnego)

$$|u \circ v| \leq \|u\| \|v\|, \quad \text{gdzie} \quad \|u\| = \sqrt{(u \circ u)}.$$

3. Sformułować (wraz ze wszystkimi założeniami) kryterium porównawcze zbieżności całek niewłaściwych typu  $\int_a^b f(t) dt$ , jeśli  $b$  jest punktem niewłaściwym (np. gdy  $f \in C([a, b))$ ).

Jeżeli dla pewnej funkcji  $g$  jest  $|f(t)| \leq g(t)$  dla wszystkich  $t \in [a, b)$ , to ze zbieżności całki niewłaściwej  $\int_a^b g(t) dt$  wynika zbieżność całki  $\int_a^b f(t) dt$ . (Wystarczy nawet, by dla pewnego  $\beta < b$  nierówność  $|f(t)| \leq g(t)$  zachodziła dla wszystkich  $t \in (\beta, b)$ .)

4. Co oznacza, że liczba  $g$  jest granicą funkcji 2 zmiennych w punkcie  $P_0$  o współrzędnych  $(x_0, y_0)$  z funkcji  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ?

$$g = \lim_{(x,y) \rightarrow P_0} f(x, y) \Leftrightarrow \forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{(x,y)} 0 < \|(x - x_0, y - y_0)\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - g| < \epsilon.$$

5. Co oznacza stwierdzenie, że występująca w poprzednim punkcie funkcja  $f$  jest różniczkowalna w punkcie  $P_0$  i czym jest różniczka z takiej funkcji?

Różniczkowalność oznacza tu istnienie odwzorowania liniowego  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  (musi ono być postaci  $L(x, y) = Ax + By$  dla pewnych liczb  $A, B \in \mathbb{R}$ , gdzie  $A = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)$ ,  $B = \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)$ ) przybliżającego przyrost wartości  $f$  od punktu  $P_0$  do punktu  $P$  z dokładnością rzędu o-male od przyrostu  $\|P - P_0\|$  argumentu przy  $P$  zmierzającym do  $P_0$ . Innymi słowy, ma być

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f(P) - f(P_0) - L(P - P_0)}{\|P - P_0\|} = 0$$

, czyli dla  $P$  o współrzędnych  $(x, y)$ ,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - A(x - x_0) - B(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$$

6. Podać wzór Gaussa-Ostrogradskiego wyrażający strumień  $I$  pola wektorowego  $\vec{F} = (P, Q, R)$  przez zewnętrzną stronę powierzchni  $\partial G$  będącej brzegiem obszaru  $G$  (Strumień ten oznaczmy symbolem  $I = \int_{\partial G} \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ , lub  $I = \int_{\partial G} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$ ).

$$I = \iiint_G \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz$$

, gdzie  $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$  oznacza dywergencję tego pola wektorowego.