

1. WZORY TRYGNOMETRYCZNE

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad \sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2},$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad 2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta),$$

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta), \quad A \sin \alpha + B \cos \alpha = \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin \alpha + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos \alpha \right)$$

Sumy ciągów: arytmetycznego $S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$, geometrycznego: $(a + aq + \dots + aq^n) = a \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Wz. skróconego mnożenia: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$,
 $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$, $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, gdzie $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Granice przy $x \rightarrow 0$ są =1 dla wyrazów: $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$, $\frac{\arcsin x}{x}$, $\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$, $\frac{\ln(1+x)}{x}$, $\frac{e^x - 1}{x}$

Inne granice: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{b}{x}\right)^x = e^b$.

Dla symboli nieoznacz. typu $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ -reguła de l'Hospitala: $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \gamma \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \gamma$.

Wz. Taylora $\exists c \in [x; x+h] f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) h^k + \frac{1}{n!} f^{(n)}(c) h^n$.

Pochodne cząstkowe $f'_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$.

Różniczka zupełna w punkcie P odwzorowania $F = (f_1, \dots, f_k)$ n zmiennych to odwzorowanie liniowe $L = d_P F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ o macierzy $\left[\frac{\partial f_j}{\partial x_m}(P) \right]_{j \leq k, m \leq n}$ (tzw. **macierz Jacobiego**) które z dokładnością do o-malego od h ($h =$ przyrost zmiennej niezależnej) wyraża przyrost wartości F :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(P+h) - F(P) - L(P)}{\|h\|} = 0.$$

Tu dla $h = (h_1, \dots, h_n)$ mamy $\|h\| = \sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}$. Np. dla $n = 2$ mamy tu granicę podwójną. Odwzorowanie jest liniowe gdy $L(u+w) = L(u) + L(w)$, $L(\alpha u) = \alpha L(u)$ dla wszystkich wektorów u, w i skalarów $\alpha \in \mathbb{R}$. Liniowe są np. operacje: różniczkowania oraz całki oznaczone.

Wybrane pochodne: $(x^a)' = ax^{a-1}$ dla $a \in \mathbb{R}$, $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
 $(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = -(\operatorname{arctg} x)'$, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -(\operatorname{arccos} x)'$, $(a^x)' = a^x \ln a$.

Reguła łańcucha $g \circ f'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$. $d_P(G \circ F) = d_{F(P)} G \circ d_P F$.

Np. dla $X = X(s, t)$, $Y = Y(s, t)$, $\Phi(s, t) = F(X(s, t), Y(s, t))$, $P_0 = (X(s_0, t_0), Y(s_0, t_0))$, mamy

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(s_0, t_0) = \frac{\partial F}{\partial X}(P_0) \frac{\partial X}{\partial t}(s_0, t_0) + \frac{\partial F}{\partial Y}(P_0) \frac{\partial Y}{\partial t}(s_0, t_0).$$

Pole obszaru między wykresami funkcji $f_1 \leq f_2$, to cała z $f_2 - f_1$ po dziedzinie tych funkcji (= przedział dla $n = 1$ lub obszar ograniczony przez punkty, gdzie wykresy się przecinają. We wsp. biegunowych $x = r(\cos \phi + \sin \phi)$ wycinek: $0 \leq r \leq R(\phi)$, $\phi \in [\alpha, \beta]$ ma pole $S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} R^2(\phi) d\phi$.

Dług. krzywej o równaniu $r = R(\phi)$ (ϕ w tym zakresie), to $\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{R^2 + \left(\frac{dR}{d\phi}\right)^2} d\phi$. Dla

krzywej zadanej parametrycznie jako wektor $\gamma(t)$, $t \in [a, b]$ liczymy ℓ jako $\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$, czyli z normy euklidesowej wektora pochodnych odpowiednich współrzędnych γ .

Pole pow. obrotowej po obrocie krzywej $y(x)$, $x \in [a, b]$, wzgl. OX, to $S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx$.

Przy obrocie wzgl OY trzeba zmienić y na x . Obj. tej bryły obrotowej: $V = \pi \int_a^b y^2(x) dx$

Różniczka pola, dS na płacie powierzchni $z = f(x, y)$, to $dS(x, y) = \sqrt{1 + f'_x{}^2 + f'_y{}^2} dx dy$, licząc pole płata, gdzie $(x, y) \in D$ liczymy całkę podwójną po obszarze D z dS . Strumień wektora \vec{F} przez płat z jednostkowym wektorem normalnym \vec{n} , to całka $\int_D \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ (iloczyn skalarny)