

Zagadnienia z analizy z teorii sem.I Elektrotechnika, 2025/26

Skróty: tw. =twierdzenie, Def.= definicje. Kolor **czzerwony** oznacza treści najważniejsze
UWAGA: znajomość dowodów nie jest obowiązkowa.

1. ZBIORY, RELACJE, ODWZOROWANIA

Definicje: Iloczynów kartezjanskich $A \times B$ pary zbiorów, relacji,

Typy relacji 2-argumentowych: równoważności, częściowego porządku; odwzorowania;

Typy odwzorowań: surjekcje, injekcje. **Złożenia odwzorowań, odwzorowania odwrotne**,
funkcje nieparzyste, parzyste, monotoniczne, silnie monotoniczne.

Def. majorant, minorant, elementów największych i kresów zbiorów liczbowych: $(\sup E, \inf E, \max E, \min E)$. **Tw. o istnieniu kresów dla zbiorów ograniczonych $E \subset \mathbb{R}$.**

2. CIĄGI (oznaczane tu skrótem "cg.")

Def. granicy ciągu $g = \lim x_n$ (właściwej: $g \in \mathbb{R}$ oraz niewłaściwej: $g = \pm\infty$).

Tw. o ciągach monotonicznych ograniczonych. Granica $\lim(1 + \frac{1}{n})^n$ [z jakich tw. korzystamy dowodząc jej zbieżności i jak ją oznaczamy]. Tw. o arytmetyce granic, tw. o zachowaniu nierówności (tezy dla nierówn. typu $a_n \leq b_n \Rightarrow \dots$, oraz typu: $\lim a_n > c \Rightarrow \dots$, tw. o 3 ciągach) tw. Bolzano-Weierstrassa, definicja i tw. o ciągach **Cauchy'ego**. Definicja sum częściowych i sumy szeregu, szereg geometryczny $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n$ -wzór na sumę i sumy częściowe, określenie, kiedy szereg jest zbieżny.

3. GRANICA FUNKCJI, CIĄGŁOŚĆ funkcji

Def. punktów skupienia zbioru, granicy funkcji w punkcie (właściwym, lub $\pm\infty$) granice niewłaściwe, jednostronne.

Tw. o równoważności warunku Heinego z definicją (Cauchy'ego) granicy funkcji. Def. i warunek Heinego cgł. funkcji w danym punkcie. Def. 3 typów punktów nieciągłości (usuwalnych, skokowych i istotnych). **Tw o istnieniu granic jednostronnych funkcji monotonicznej (np. dla f niemalejących wyrażenie granicy lewostronnej przez pewien kres górny).** **Tw. Bolzano- Cauchy'ego** (o osiąganiu wartości pośrednich) funkcji ciągłych na przedziale. Ciągłość funkcji odwrotnej do funkcji monotonicznej na przedziale. Monotoniczność, ciągłość funkcji potęgowej i wykładniczej . **Własności logarytmu** [typu $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$]. **Tw. Weierstrassa** o osiąganiu kresów i o ograniczoności dla f ciągłych w $[a, b]$.

4. POCHODNA FUNKCJI

Def, różniczkowalności w punkcie. (Tw.: różniczkowalność implikuje ciągłość, przykład, że nie na odwrót). Liniowość operacji różniczkowania. Tw. o pochodnej iloczynu (wzór Leibniza), ilorazu. Tw. o pochodnych: funkcji złożonej, funkcji odwrotnej. Def. ekstremum lokalnego, Tw. Fermata (warunek konieczny dla istnienia ekstr. lokalnego dla f różniczkowalnej. Tw. o wartości średniej (Rolle'a Lagrange'a i Cauchy'ego). [**Wnioski z tw. o wartości średniej:** Tw. o oszacowaniu przyrostu funkcji przy użyciu przyrostu argumentu i pochodnej. Tw. wiążące znak pochodnej i monotoniczność. Tw.: **Reguła de l'Hospitala**]. [Srowadzanie wyrażeń nieoznaczonych do wyrażeń typu $\frac{0}{0}$]

5. Def. pochodnej rzędu k

Przykłady: wzór na $f^{(k)}$ dla $f(x)$ typów: a^x , $(x-c)^n$, $\sin x$, $\frac{1}{x}$. Def. **wielomianu Taylora** rzędu n w punkcie x_0 . Tw.(Lagrange'a i Peana) **o postaci reszty we wzorze Taylora**. Zastosowanie do badania istnienia ekstremum lokalnego, do oszacowania błędu przybliżania $f(x)$ wielomianami Taylora. **Def. wypukłości funkcji f -jej charakteryzacja przez własności f' (odpowiednio -przez znak f'').**

6. CAŁKA NIEOZNACZONA

Def. funkcji pierwotnej i całki nieoznaczonej. Liniowość całki. Tw. **o całkowaniu przez części i przez podstawienie**. Rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste (metoda). Podstawienie trygonometryczne.