

Algebra Liniowa z Geometrią

1. Definicja liczby zespolonej i jej trzy postacie. Moduł i sprzężenie liczby zespolonej.
2. Wzór Eulera, jego uzasadnienie i zastosowanie. Funkcje argumentu zespolonego.
3. Mnożenie dwóch liczb zespolonych (postać trygonometryczna), potęgowanie (postać wykładnicza)(w tym wzór de Moivre'a), pierwiastkowanie (postać wykładnicza). Interpretacja geometryczna pierwiastkowania.
4. Twierdzenie Bezouta, podstawowe twierdzenie algebry (o liczbie pierwiastków wielomianu).
5. Definicja krotności pierwiastka wielomianu. Udowodnij twierdzenie o pierwiastkach sprzężonych wielomianu rzeczywistego. Wniosek dotyczący rozkładalności.
6. Definicja półgrupy, półgrupy przemiennej, grupy i grupy przemiennej.
7. Definicja ciała. Opis ciała Galois $GF(2)$.
8. Definicja pierścienia, pierścienia całkowitego, pierścienia z jednością.
9. Kongruencja, definicja relacji porządku, klasy równoważności, relacja binarna.
10. Permutacja, transpozycja, inwersje. Rozkład na cykle. Grupy permutacji.
11. Definicja przestrzeni liniowej nad dowolnym ciałem \mathbb{F} oraz wnioski z tej definicji.
12. Dla dowolnych $\lambda \in \mathbb{F}$ i $u \in V$ (V – przestrzeń liniowa) sformułuj i udowodnij warunek konieczny i wystarczający tego, że $\lambda u = \mathbf{0}$.
13. Typy struktur algebraicznych. Definicja homomorfizmu, izomorfizmu, endomorfizmu, automorfizmu i epimorfizmu
14. Definicja kombinacji liniowej oraz liniowej zależności i niezależności wektorów
15. Definicja wymiaru przestrzeni liniowej, bazy przestrzeni liniowej oraz powłoki liniowej zbioru.
16. Definicja macierzy, transpozycja macierzy. Dodawanie i mnożenie macierzy. Transpozycja iloczynu dwóch macierzy.
17. Elementarne przekształcenia wierszowe. Definicja rzędu macierzy. Metoda eliminacji Gaussa, Gaussa-Jordana. Wpływ elementarnych przekształceń wierszowych na rząd macierzy. Znajdowanie macierzy odwrotnej.
18. Twierdzenie Kroneckera – Capellego (wersja rozszerzona o parametry dowolnych). Rozwiązalność układu m równań o n niewiadomych.
19. Znajdowanie macierzy odwrotnej (dwoma sposobami). Definicja macierzy nieosobliwej. Macierz odwrotna iloczynu macierzy.
20. Udowodnij twierdzenie :”Jeżeli zbiór A , $A \subset V$ (V – przestrzeń liniowa nad \mathbb{F}) jest liniowo niezależny i $x \in V$, to układ $A \cup \{x\}$ jest liniowo niezależny, wtedy i tylko wtedy gdy x nie należy do powłoki liniowej zbioru A . .”
21. Twierdzenie charakteryzujące bazę.
22. Twierdzenie o wymianie w bazie.
23. Definicja odwzorowania liniowego, macierz takiego odwzorowania. Definicja macierzy przejścia. Twierdzenie o związku macierzy przejść i macierzy danego odwzorowania liniowego f . Reprezentacja macierzowa odwzorowania liniowego.
24. Macierze równoważne, podobne, przystające (kongruentne), kiedy się pojawiają?
25. Twierdzenie o macierzy złożenia odwzorowań.
26. Definicja jądra i obrazu odwzorowania liniowego, ich wymiary i bazy. Twierdzenie o wymiarze dziedziny.
27. Definicja wyznacznika stopnia n , rola permutacji. Twierdzenie Laplace'a. $\det(\lambda A) = ?$

28. Metoda Sarrusa obliczania wyznacznika macierzy (ale jakiego stopnia?). Twierdzenie o istnieniu macierzy odwrotnej (podaj odpowiedni wzór).
29. Własności wyznacznika i wnioski. Wyznacznik jako forma antysymetryczna.
30. {Sformułuj twierdzenie Cayleya (o grupach permutacji), twierdzenie Lagrange'a (o podgrupach).} Usunąć!
31. Cramerowski układ równań. Twierdzenie Cramera. Wzory Cramera.
32. Elipsa, hiperbola, parabola. Definicje „metryczne”.
33. {Lemniskata Bernouillego. Twierdzenie Jordana.} Usunąć!
34. Przestrzeń afiniczna, podprzestrzeń afiniczna, wymiar przestrzeni afinicznej. Definicja układu współrzędnych afinicznych.
35. Definicja odwzorowania afinicznego. Równoległość przestrzeni afinicznych. Interpretacja układu równań RLN („liniowych”, „niejednorodnych”) w przestrzeni afinicznej.
36. Definicja formy liniowej i przestrzeni dualnej. Baza dualna.
37. Definicja izomorfizmu kanonicznego i refleksywności.
38. Definicja formy półtoraliniowej, dwuliniowej, hermitowskiej.
39. Iloczyn skalarny, wnioski. Nierówność Cauchy'ego–Schwarza–Buniakowskiego.
40. Definicja normy. Kąt między wektorami. Przestrzeń liniowa euklidesowa, unitarna, afiniczna euklidesowa. Metryka wyznaczona przez normę.
41. Definicja sumy prostej, sumy algebraicznej i mnogościowej podzbiorów.
42. Podaj wzór Grassmana.
43. Twierdzenie o bezwładności form kwadratowych rzeczywistych.
44. Kiedy suma algebraiczna jest sumą prostą? Sformułuj i udowodnij twierdzenie o istnieniu podprzestrzeni dopełniającej.
45. Jaką podprzestrzeń nazywamy niezmienniczą względem danego endomorfizmu?
46. Definicja formy kwadratowej, biegunowej. Podaj związek między formą biegunową i kwadratową. Polaryzacja formy kwadratowej.
47. Macierz formy dwuliniowej. Macierze przystające, zmiana macierzy przy zmianie bazy.
48. Formy symetryczne i antysymetryczne.
49. Co nazywamy postacią kanoniczną formy dwuliniowej? Metoda Lagrange'a sprowadzania do postaci kanonicznej.
50. Sformułuj twierdzenie o istnieniu postaci Jacobiego formy kwadratowej.
51. Rząd formy. Określoność formy kwadratowej. Sformułuj twierdzenie Sylwestera.
52. Definicja wektora własnego, wartości własnej, wielomianu charakterystycznego. Wielomian charakterystyczny jako niezmiennik (niezmiennik czego?).
53. Widmo (spektrum) macierzy. Krotność algebraiczna i geometryczna. Jaki jest związek między tymi krotnościami?
54. Definicja podprzestrzeni własnej. Wymiar przestrzeni własnej.
55. Co to znaczy, że macierz odwzorowania jest diagonalizowalna? Sformułuj WW (warunek wystarczający) diagonalizacji macierzy. Podaj też WKW diagonalizacji.
56. Zdefiniuj algebrę operatorów, z jakich składa się elementów? Sformułuj twierdzenie Hamiltona – Cayleya.
57. Zdefiniuj operator nilpotentny, idempotentny, involucję oraz podaj, jakie mają one wielomiany minimalne.
58. Co to jest wielomian minimalny? Kiedy dla A (A - operator) istnieje A^{-1} ? Czym jest stopień wielomianu minimalnego?

59. Podaj definicję bazy ortogonalnej, ortonormalnej. Metoda ortogonalizacji Grama – Schmidta. Rzut ortogonalny.
60. Co to jest dopełnienie ortogonalne? Twierdzenie o istnieniu podprzestrzeni dopełniającej.
61. Definicja orientacji przestrzeni. Co to jest orientacja dodatnia a co ujemna?
62. Definicja i własności iloczynu wektorowego.
63. Iloczyn mieszany wektorów. Przykłady zastosowania iloczynu wektorowego i mieszanego.
64. Równanie ogólne i parametryczne płaszczyzny, równanie podprzestrzeni afinicznej.
65. Równanie parametryczne, krawędziowe i kierunkowe prostej. Wzajemne położenie prostych w przestrzeni.
66. Klatka Jordana stopnia m . Co to jest postać kanoniczna Jordana danej macierzy?
67. Baza Jordana. Na czym polega sprowadzanie macierzy do postaci Jordana?
68. Podprzestrzenie pierwiastkowe, wektory główne, ich rzędy.
69. Definicja i własności sprzężenia operatora liniowego, analogicznie operatora samosprzężonego.
70. Odwzorowanie ortogonalne i odpowiednio unitarne, analogicznie o macierzy.
71. Wyznacznik macierzy unitarnej (lub ortogonalnej) z dowodem.
72. Wartości własne macierzy hermitowskiej lub rzeczywistej symetrycznej.
73. Związek między izometrią liniową i unitarnością.
74. Warunek wystarczający trywialności operatora w przestrzeni z iloczynem skalarnym.
75. Typy kwadryk. Co jest niezmiennicze u kwadryk i względem czego?