Baza w jądrze i baza obrazu (8.03.09)

Przykład $\bullet$ $\triangledown$

Znajdź bazy jądra i obrazu odwzorowania $\alpha : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, gdzie

$$\alpha(x, y, z, t) = (x + 2z + t, -2x + y - 3z - 5t, x - y + z + 4t). \tag{1}$$

Wzór ten oznacza, że α jest odwzorowaniem liniowym. Mianowicie wzór taki jak ten określa odwzorowanie liniowe, dokładnie gdy wszystkie współrzędne wartości α są wielomianami jednorodnymi stopnia 1 łącznie względem współrzędnych argumentu, czyli czterech zmiennych x, y, z, t.

To oznacza, że α ma następującą reprezentację macierzową

$$\alpha(x, y, z, t)^T = A \cdot (z, y, z, t)^T,$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Zatem kolejne wiersze w A są wierszami współczynników przy zmiennych x, y, z, t (w tej kolejności) w kolejnych współrzędnych wektora $\alpha(x, y, z, t)$. Pierwszy wiersz tworzą więc współczynniki w pierwszej współrzędnej, drugi – w drugiej, itd. Stąd, ponieważ także istnienie reprezentacji macierzowej implikuje liniowość odwzorowania α,

$$\alpha \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3).$$

Nadto

$$A = \mathcal{M}_{\mathbf{B}_3}^{\mathbf{B}_4}(\alpha), \qquad \text{gdzie } \mathbf{B}_n \text{ jest bazą standardową w } \mathbb{R}^n,$$

$$\mathbf{B}_n = (e_i)_{i=1}^n = (e_1 \dots, e_n),$$

tzn. każdy wektor bazowy jest typu 0-(jedno)1, a mianowicie

$$e_j = [\delta_{ij}]_{n \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{wiersz } i = j.$$

Wtedy

$$\ker \alpha = \{\, (x, y, z, t)^T \mid \underbrace{\alpha(x, y, z, t) = \Theta_3}_{A \cdot (x,y,z,t)^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \},$$

gdzie Θ_3 jest zerem (elementem zerowym) w $\mathbb{R}^3$. Nadto

$$\dim \ker \alpha = n - r,$$

gdzie $n = 4$ jest liczbą zmiennych (niewiadomych) oraz

$$r = \operatorname{rz} A.$$

Stosując elementarne przekształcenia wierszowe, aby rozwiązać powyższe RLJ (równanie liniowe jednorodne) o macierzy A, otrzymujemy RORLJ (rozwiązanie ogólne RLJ), które jest jądrem odwzorowania α, a z niego możemy odczytać bazę jądra:

$$A \mapsto (\text{ZWPS}) \mapsto \text{RORLJ} = \ker \alpha \mapsto \text{baza w } \ker \alpha.$$

Szukamy obrazu odwzorowania α,

$$\operatorname{im} \alpha := \alpha[\mathcal{D}_\alpha],$$

gdzie $\mathcal{D}_\alpha = \mathbb{R}^4$ jest dziedziną odwzorowania α. Z definicji macierzy odwzorowania wynika, że kolumny macierzy A są kolumnami współrzędnych wartości odwzorowania α dla kolejnych wektorów bazy $\mathbf{B}_4$ w D_α, przy czym są to współrzędne względem bazy $\mathbf{B}_3$ w $\mathbb{R}^3$.

$$\operatorname{im} \alpha = \operatorname{lin} (\text{kolumny macierzy } A) = \operatorname{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ \text{-2} \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \text{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ \text{-3} \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \text{-5} \\ 4 \end{bmatrix} \right).$$

Zatem

$$\dim \operatorname{im} \alpha = r = \operatorname{rz} A.$$

Przypomnijmy interpretację kolumn macierzy A. Przyjmując oznaczenia

$\mathbf{B}_4 = (e_1^4, e_2^4, e_3^4, e_4^4)$ oraz $\mathbf{B_3} = (e_1^3, e_2^3, e_3^3)$, mamy

$$\alpha(e_1^4) = \alpha(1,0,0,0) = (1,-2,1) \qquad \text{zgodnie z (1), a stąd}$$

$$\left[\alpha(e_1^4)\right]_{\mathbf{B_3}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

tzn. w zapisie kolumnowym mamy

$$\alpha(e_1^4) = 1 \cdot e_1^3 + (-2) \cdot e_2^3 + 1 \cdot e_3^3.$$

Oto obliczenia dla znalezienia ZWPS(A) (zredukowanej wierszowej postaci schodkowej macierzy A).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow w_3 + w_2 \end{matrix} \quad \mapsto$$

$$\mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & -5 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow w_2 + 2w_1 \\ \leftarrow w_3 + w_1 \end{matrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{ZWPS}(A).$$

Numery kolumn przewodnikowych – to 1, 2. Zatem $r = 2$ oraz kolumny 1, 2 macierzy A są liniowo niezależne. Kolumny te rozpinają obraz $\operatorname{im}\alpha$:

$$\operatorname{im}\alpha = \operatorname{lin}\underbrace{\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)}_{\text{Baza w } \operatorname{im}\alpha},$$

$$\begin{gathered} \mathrm{rz}A = r = 2 = \dim\, \operatorname{im}\alpha, \\ \dim\ker\alpha = n - r = 4 - 2 = 2. \end{gathered}$$

Znajdujemy rozwiązanie RORLJ, czyli równania
$AX = \Theta_3$, gdzie $X := (x, y, z, t)^T$.
Niewiadome główne – to x, y, por. ZWPS(A), z czego wynika, że
$x = -2z - t$, $y = 3t - z$. Zatem jeśli $z := a \in \mathbb{R}$ oraz $t := b \in \mathbb{R}$, to

$$X = \begin{bmatrix} \text{x} \\ \text{y} \\ \text{z} \\ \text{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{-2a-b} \\ \text{3b-a} \\ \text{a} \\ \text{b} \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Bazę w $(\ker\alpha)$ tworzą więc kolumny $(-2, -1, 1, 0)^T$, $(-1, 3, 0, 1)^T$. $\bullet\ \triangle$

Transponowanie i odwracanie macierzy

Twierdzenie 1 *(o przemienności odwracania i transponowania).*

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} \quad \textit{dla dowolnej macierzy nieosobliwej } A.$$

Lemat 2 *(o transponowaniu iloczynu macierzy). Jeśli* $A \in \mathbb{K}^{m\times r}$ *i* $B \in \mathbb{K}^{r\times s}$*, to*

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T. \tag{2}$$

DOWÓD Lematu. Macierz $A \cdot B$ ma wymiary $m \times s$. Zatem $(A \cdot B)^T$ jest macierzą $s \times m$. Niech

$$A \cdot B =: C = [c_{ij}]_{m\times s}.$$

Dla dowodu równości (2) obliczamy oddzielnie jej strony L i P.

$$L = [l_{ij}]_{s\times m} := (A \cdot B)^T = C^T.$$

Wtedy

$$l_{ij} = c_{ji} = \sum_{k=1}^{r} a_{jk} b_{ki}.$$

Niech

$$P = [p_{ij}]_{s\times m} := B^T \cdot A^T,$$

gdzie

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{r} b_{ki} \cdot a_{jk},$$

a zatem $p_{ij} = l_{ij}$. □

DOWÓD Twierdzenia 1. Niech

$$A, B \in \mathbb{K}^{n\times n},$$

gdzie

$$A \cdot B = I, \quad \text{tzn.} \quad B = A^{-1}.$$

(wtedy macierze są nieosobliwe). Transponując i stosując Lemat 2, otrzymujemy

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T = I^T = I,$$

$$\Rightarrow B^T = (A^T)^{-1},$$

a ponieważ $B = A^{-1}$, więc

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}.$$

□

Twierdzenie 3 *Dla macierzy* $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *nieosobliwych (tego samego stopnia* n*)*

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

Dowód. Macierz nieosobliwa jest macierzą automorfizmu (endomorfizm bijektywny). Iloczyn macierzy nieosobliwych A, B tego samego stopnia jest macierzą złożenia automorfizmów (czyli macierzą automorfizmu). Iloczyn ten jest więc odwracalny. Niech

$$D = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

Wtedy

$$(A \cdot B) \cdot D = A \cdot \underbrace{B \cdot B^{-1}}_{I} \cdot A^{-1} = A \cdot I \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I,$$

skąd $D = (A \cdot B)^{-1}$. □

Macierz odwzorowania liniowego w różnych parach baz

Niech
$$\alpha \in \mathcal{L}(V, W),$$
gdzie V, W – to przestrzenie liniowe nad tym samym ciałem $\mathbb{K}$,
$\mathbf{B}_V, \mathbf{B}_W$ - bazy uporządkowane w tych przestrzeniach.

Wtedy istnieje macierz
$$A := \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(\alpha)$$
taka, że jeżeli $y = \alpha(x)$ dla $x \in V$, gdzie $y \in W$, to
$$\forall\, x \in V,\ y = \alpha(x) \qquad [y]_{B_W} = A \cdot [x]_{B_V}.$$
Jest to reprezentacja macierzowa odwzorowania α. Rozważmy nowe bazy $\mathbf{B}'_W$, $\mathbf{B}'_V$. Mamy macierze przejścia
$$P_2 := P_{\mathbf{B}'_W}^{\mathbf{B}_W} = \mathcal{M}_{\mathbf{B}_W}^{\mathbf{B}'_W}(\mathrm{id}_W)$$
oraz
$$P_1 := P_{\mathbf{B}'_V}^{\mathbf{B}_V} = \mathcal{M}_{\mathbf{B}_V}^{\mathbf{B}'_V}(\mathrm{id}_V)$$
od starych do nowych baz, gdzie id_W oraz id_V – to identyczności na W i V. Zatem
$$[y]_{\mathbf{B}_W} = P_2 \cdot [y]_{\mathbf{B}'_W},$$
$$[x]_{\mathbf{B}_V} = P_1 \cdot [x]_{\mathbf{B}'_V}.$$
Po podstawieniu do reprezentacji macierzowej odwzorowania α mamy
$$P_2 \cdot [y]_{\mathbf{B}'_W} = A \cdot P_1 \cdot [x]_{\mathbf{B}'_W},$$
skąd mnożąc przez P_2^{-1} obustronnie z lewych stron, otrzymujemy
$$\forall\, x \in V,\ y = \alpha(x) \qquad [y]_{\mathbf{B}'_W} = \underbrace{(P_2^{-1} \cdot A \cdot P_1)}_{=:\, A'} \cdot [x]_{\mathbf{B}'_V}. \tag{3}$$
Powyższa równość (3) zachodzi dla każdego x i dlatego jest nową reprezentacją macierzową odwzorowania α. Mianowicie, jeśli $x = x_k$ jest wektorem k w bazie $\mathbf{B}_{V'}$, to $[x]_{\mathbf{B}'_V} = (\delta_{ik})_{n\times 1}$, a zatem prawa strona w (3) jest kolumną k macierzy $A' = P_2^{-1} \cdot A \cdot P_1$, a to jest kolumną $[\alpha(x_k)]_{\mathbf{B}'_W}$ po lewej stronie (3). Ostatecznie więc macierz A' jest jednoznacznie określona oraz macierz A' jest macierzą dla α w nowej parze baz,
$$A' = P_2^{-1}\, A\, P_1 = \mathcal{M}_{\mathbf{B}'_W}^{\mathbf{B}'_V}(\alpha). \tag{4}$$
Równość ta motywuje następującą definicję.

Definicja 1 *Dwie macierze A, B nazywamy równoważnymi, gdy istnieją nieosobliwe macierze C, D takie, że:*
$$B = C \cdot A \cdot D.$$

Twierdzenie 4 *Macierze są równoważne dokładnie wtedy, gdy są macierzami tego samego odwzorowania liniowego w różnych parach baz.* $\square$

Niech α będzie endomorfizmem $V \to V$. Macierz endomorfizmu jest zależna od wyboru tylko jednej bazy. Jeśli więc A jest macierzą endomorfizmu α w bazie $\mathbf{B}_V$, to

$$A := \mathcal{M}_{\mathbf{B}_V}^{\mathbf{B}_V}(\alpha)$$

Nadto A jest macierzą kwadratową. Nową macierzą A', czyli macierzą w nowej bazie $\mathbf{B}'_V$, zgodnie ze wzorem (4), jest

$$A' := \mathcal{M}_{\mathbf{B}'_V}^{\mathbf{B}'_V}(\alpha) = P^{-1} \cdot A \cdot P,$$

gdzie teraz P oznacza macierz przejścia od starej do nowej bazy w V, $P = P_{\mathbf{B}'_V}^{\mathbf{B}_V}$.

Zatem jeśli $B = A'$, to

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P.$$

Definicja 2 *Dwie macierze A, B nazywamy podobnymi, gdy istnieje macierz nieosobliwa* $\mathbf{P}$ *taka, że*

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P.$$

Zatem macierze podobne są kwadratowe tego samego stopnia.

Twierdzenie 5 *Dwie macierze są podobne dokładnie wtedy, gdy są macierzami tego samego endomorfizmu (ale ewentualnie w różnych bazach dziedziny endomorfizmu).* $\square$

Przestrzeń afiniczna

Rozważmy trójkę uporządkowaną
$\mathcal{X} = (\mathbb{X}, V, +)$, gdzie $\mathbb{X}$ jest zbiorem **punktów** $\dot{x} \in \mathbb{X}$,
V jest zbiorem **wektorów swobodnych**, a dokładniej
V oznacza przestrzeń liniową $(V, \oplus, \mathbb{K}, \cdot)$ nad ciałem $\mathbb{K}$, zaś

$$+ : \mathbb{X} \times V \ni (\dot{x}, v) \mapsto \dot{x} + v \in \mathbb{X}$$

jest **dodawaniem zewnętrznym** w $\mathbb{X}$.

Trójka $\mathcal{X}$ jest **przestrzenią afiniczną**, gdy spełnione są następujące dwa warunki (**aksjomaty**).

AF1 *Dodawanie zewnętrzne ma własność*

$$\dot{x} \in \mathbb{X},\ v_1,\, v_2 \in V \Rightarrow (\dot{x} + v_1) + v_2 = \dot{x} + (v_1 \oplus v_2),$$

AF2

$$\dot{x},\ \dot{y} \in \mathbb{X} \Rightarrow (\exists!\ v \in V)\ \dot{x} + v = \dot{y}.$$

Sens **AF2**: $\forall\, \dot{x} \in \mathbb{X}$ istnieje bijekcja $V \ni v \mapsto \dot{x} + v \in \mathbb{X}$, gdzie korzystamy z definicji działania $+$. Z drugiej strony, $\forall\, v \in V$ odwzorowanie

$$t_v : \mathbb{X} \ni \dot{x} \mapsto \dot{x} + v \in \mathbb{X}$$

jest bijekcją zwaną **translacją** (przesunięciem równoległym) **o wektor** v.

Ćwiczenie. Udowodnij, że zbiór translacji $\{\, t_v \mid v \in V \}$ z działaniem składania, $t_u t_v = t_{u \oplus v}$, jest grupą izomorficzną z grupą addytywną $(V, \oplus)$.

Dla uproszczenia oznaczeń będziemy mówić przestrzeń afiniczna $\mathbb{X}$ (eliminując symbol $\mathcal{X}$). Przestrzeń V nazywa się **przestrzenią liniową stowarzyszoną** z $\mathbb{X}$. Przyjmuje się oznaczenie $V = \overrightarrow{\mathbb{X}}$ albo $V = \mathbb{X}^{\rightarrow}$, aby wyeliminować symbol V. Mówimy, że **wymiarem** przestrzeni afinicznej $\mathbb{X}$ jest wymiar $\dim V$ przestrzeni liniowej stowarzyszonej z $\mathbb{X}$.

Przestrzeń afiniczna $\mathbb{X}$ nazywa się **rzeczywistą** względnie **zespoloną**, gdy ciało $\mathbb{K}$ jest odpowiednio rzeczywiste, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lub zespolone, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definicja 3 *Jedyny wektor v w AF2 oznaczamy symbolem $\overrightarrow{xy}$. Dopuszczalne jest też oznaczenie $v = \overrightarrow{xy} = (\dot{y} - \dot{x}) = \dot{y} - \dot{x}$.*

Wtedy v jest wektorem swobodnym w przestrzeni afinicznej, reprezentowanym przez wektor zaczepiony w punkcie $\dot{x}$ i o końcu w punkcie $\dot{y}$.

Niech Θ oznacza **wektor zerowy** w V.

Lemat 6 *$\dot{x} + \Theta = \dot{x}\quad \forall \dot{x}$, czyli $\overrightarrow{xx} = \Theta$.*

Dowód. Na podstawie AF2 istnieje dokładnie jeden wektor v (zależny od $\dot{x}$), dla którego $\dot{x} + v = \dot{x}$. Zatem na podstawie AF1 mamy $\dot{x} + 2v = (\dot{x} + v) + v = \dot{x} + v = \dot{x}$, skąd na mocy AF2 mamy $2v = v$, czyli $v = \Theta$ (niezależnie od $\dot{x}$). $\square$

Lemat 7 *$\underbrace{\overrightarrow{xy} \oplus \overrightarrow{yz}}_{=L} = \underbrace{\overrightarrow{xz}}_{=P}$, gdzie $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \in \mathbb{X}$.*

Dowód. Stosując najpierw AF1, a następnie Definicję 3, mamy

$\dot{x} + L = (\dot{x} + \overrightarrow{xy}) + \overrightarrow{yz} = \dot{y} + \overrightarrow{yz} = \dot{z} = \dot{x} + P.$

Stąd $L = P$ na mocy AF2. $\square$

Twierdzenie 8 $\dot{x}, \dot{y} \in \mathbb{X} \Rightarrow [\overrightarrow{xy} = \Theta \Leftrightarrow \dot{x} = \dot{y}]$

Dowód równoważności. (? $\Leftarrow$) Implikacja jest prawdziwa na mocy Lematu 6.

(? $\Rightarrow$) Zakładamy, że $\overrightarrow{xy} = \Theta$. Zatem z Lematu 6 mamy
$\dot{x} = \dot{x} + \Theta = \dot{x} + \overrightarrow{xy} = \dot{y}$. $\square$

Przykład „standardowy” przestrzeni afinicznej. $\bullet$ $\bigtriangledown$
Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$, $V = (V, \oplus, \mathbb{K}, \cdot)$. Wtedy trójka $(V, V, +)$, gdzie $+ = \oplus$, jest przestrzenią afiniczną.
$u + v$ - interpretujemy jako punkt, zaś $u \oplus v$ oznacza sumę wektorów. $\bullet$ $\bigtriangleup$

Jeżeli $\mathbf{B}$ jest bazą uporządkowaną w V, $\mathbf{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, gdzie $n = \dim V$, zaś $\dot{x}_0 = \mathbb{O} \in \mathbb{X}$ jest punktem, to parę $(\mathbb{O}, \mathbf{B})$, czyli parę $(\dot{x}_0, \mathbf{B})$, nazywamy **układem współrzędnych** w przestrzeni afinicznej $\mathbb{X}$.

Współrzędnymi punktu $\dot{x} \in \mathbb{X}$ są wtedy współrzędne względem bazy $\mathbf{B}$ wektora $\overrightarrow{\mathbb{O}x}$ wodzącego punktu $\dot{x}$, tzn. jeżeli

$$\overrightarrow{\mathcal{O}x} = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i,$$

gdzie b_i – to wektory bazowe, to $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest ciągiem współrzędnych punktu $\dot{x}$ w rozważanym układzie współrzędnych. Zatem punkt $\mathcal{O}$ ma wszystkie współrzędne równe zero, bo $\overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{O}} = \Theta$ na podstawie Lematu 6.

Na odwrót, mając współrzędne (x_i) oraz (y_i) punktów $\dot{x}, \dot{y}$, współrzędne wektora $\overrightarrow{xy}$ $(= \dot{y} - \dot{x})$ otrzymujemy odejmując od współrzędnych końca $\dot{y}$ współrzędne początku, tzn. wektor $\dot{y} - \dot{x}$ ma współrzędne

$$[y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots, y_n - x_n].$$

Wynika to stąd, że współrzędne różnicy wektorów są różnicami kolejnych współrzędnych, zaś

$$\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{\mathbb{O}y} - \overrightarrow{\mathbb{O}x} = \dot{y} - \dot{x}.$$

Definicja 4 *Podzbiór* $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ *nazywamy* **podprzestrzenią afiniczną**, *gdy istnieje podprzestrzeń liniowa* $U \subseteq V$ *taka, że trójka* $(\mathbb{Y}, U, \tilde{+})$ *jest przestrzenią afiniczną, przy czym* $\tilde{+}$ *jest zaciśnieniem dodawania* $+$ *do* $\mathbb{Y} \times U$.

Zbiór U nazywamy wtedy zbiorem **wektorów równoległych** do przestrzeni afinicznej $\mathbb{Y}$, albo krócej, U nazywamy **kierunkiem** podprzestrzeni afinicznej $\mathbb{Y}$.