

Kryterium stabilności Nyquista i marginesy stabilności

Układ o transmitancji wymiernej jest stabilny, jeśli wszystkie pierwiastki mianownika jego transmitancji leżą w lewej półpłaszczyźnie zespolonej, co jest równoważne temu, że części rzeczywiste ich biegunów są ujemne. Wynika to z faktu, że każdą transmitancję wymierną można rozłożyć na sumę ułamków prostych, gdzie każdemu składnikowi postaci:

$$\frac{A_i}{s - B_i} \text{ odpowiada odwrotna transformata Laplace'a: } A_i \exp(B_i t), \text{ gdzie } B_i \text{ jest biegunem transmitancji.}$$

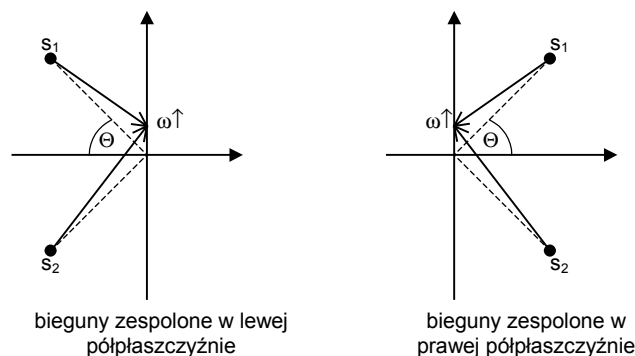
Dodatnia część rzeczywista bieguna B_i powodowałaby więc narastanie odpowiedzi impulsowej w czasie do nieskończoności.

Do sprawdzenia stabilności układu o znanej charakterystyce częstotliwościowej można posłużyć się graficznym kryterium Nyquista, które można uzasadnić poniższym rozumowaniem.

Mianownik transmitancji można zapisać jako:

$$M(s) = A(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n),$$

gdzie każdy człon $(s - s_i)$ można przedstawić jako wskaz na płaszczyźnie zespolonej – patrz rysunek poniżej. Z właściwości transmitancji rzeczywistych obiektów wynika, że jeśli biegun jest zespolony, to do pary musi istnieć dla niego biegun o wartości sprzężonej.



Przy zmianie pulsacji od zera do nieskończoności (co odpowiada przesuwaniu końca wskazów po osi rzędnych od punktu 0 w górę) dla pary biegunów w lewej półpłaszczyźnie nastąpi obrót obydwu wskazów o kąt $\Delta\varphi = (\pi/2 + \Theta) + (\pi/2 - \Theta) = \pi$ (patrz powyższy rysunek). Jeśli występowałby pojedynczy biegun rzeczywisty, to wtedy będzie mu odpowiadał obrót o kąt $\Delta\varphi = \pi/2$. Analogiczna zmiana częstotliwości spowoduje dla biegunów ulokowanych w prawej półpłaszczyźnie obrót wskazów o kąt $\Delta\varphi = (-\pi/2 + \Theta) + (-\pi/2 - \Theta) = -\pi$.

Równoważnym sposobem reprezentacji zachowania się wielomianu $M(s)$ dla $s = j\omega$ jest przedstawienie na płaszczyźnie zespolonej przebiegu $\text{Im}\{M(j\omega)\} = f(\text{Re}\{M(j\omega)\})$ (czyli części urojonej w funkcji części rzeczywistej). Każdemu punktowi takiego wykresu odpowiada pewna konkretna wartość pulsacji ω . Wskaz poprowadzony od początku układu współrzędnych do pewnego punktu na wykresie jest równoważny wskazowi będącemu iloczynem wszystkich wskazów elementarnych (po jednym dla każdego bieguna). Taki sposób reprezentacji jest znacznie wygodniejszy w praktyce, gdyż wymaga znajomości jedynie charakterystyki częstotliwościowej układu zamiast znajomości położenia biegunów.

Z powyższego rozumowania można wyciągnąć wniosek, że układ opisywany transmitancją o n biegunach będzie stabilny, jeśli przy zmianie częstotliwości od zera do nieskończoności wskaz związany z mianownikiem $M(s)$ jego transmitancji dozna całkowitego obrotu o kąt $\Delta\varphi = n \cdot \pi/2$.

Przenosząc to na układy ze sprzężeniem zwrotnym przyjmijmy następujące założenia i oznaczenia (wykładniki oznaczają rzędy odpowiednich wielomianów a nie ich potęg):

- wzmacniacz w otwartej pętli sprzężenia zwrotnego jest układem stabilnym i ma transmitancję rzędu n :

$$k(s) = \frac{A^m(s)}{B^n(s)}; \quad m < n$$

- czwórnik sprzężenia zwrotnego jest układem stabilnym i ma transmitancję rzędu k :

$$\beta(s) = \frac{a^l(s)}{b^k(s)}; \quad l < k$$

W związku z tym wzmocnienie układu z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego wynosi:

$$k_f(s) = \frac{k(s)}{1 + k(s)\beta(s)} = \frac{k(s)}{P(s)}.$$

Mianownik tego wyrażenia można zapisać jako:

$$P(s) = 1 + \frac{A(s)}{B(s)} \frac{a(s)}{b(s)} = \frac{B(s)b(s) + A(s)a(s)}{B(s)b(s)} = \frac{Q^{n+k}(s)}{R^{n+k}(s)}.$$

Ze względu na założoną wcześniej stabilność wzmacniacza w otwartej pętli o stabilności całego układu decydować będzie tylko wielomian $Q(s)$. Ponieważ rząd tego wielomianu jest $n+k$ to układ będzie stabilny, jeżeli związany z nim wskaz dozna obrotu o kąt $\Delta\varphi_Q = (n+k)\pi/2$. Ze stabilności wzmacniacza i układu sprzężenia zwrotnego wynika z kolei, że wskaz związany z wielomianem $R(s)$ również dozna obrotu o kąt $\Delta\varphi_R = (n+k)\pi/2$. W sumie oznacza to, że wskaz związany z całym mianownikiem $P(s)$ powinien wykonać obrót o kąt 0° jeśli układ z zamkniętą pętlą ma być stabilny.

Powyższy warunek można zinterpretować w ten sposób, że wykres $\text{Im}\{P(j\omega)\} = f(\text{Re}\{P(j\omega)\})$ nie powinien obejmować punktu początkowego układu współrzędnych. Jeśli sporządzimy wykres $\text{Im}\{k(j\omega)\beta(j\omega)\} = f(\text{Re}\{k(j\omega)\beta(j\omega)\})$, to nie powinien on obejmować punktu $(-1, j0)$.

