Zestaw 1. Liczby zespolone

1. Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej zbiory:

$$A = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leqslant |z+2| < 4\}, \qquad B = \{z \in \mathbb{C} : |z+i| = |z-1|\},$$
$$C = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(iz-1) \leqslant 2\}, \qquad D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2)\operatorname{Im}(z^2) < 0\},$$
$$E = \{z \in \mathbb{C} : \arg(z+iz) = \pi\}, \qquad F = \{z \in \mathbb{C} : \pi/2 < \arg(z^3) < 3\pi/2\}.$$

2. Wykaż, że dla dowolnych $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ prawdziwa jest nierówność

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

3. Przedstaw w postaci trygonometrycznej i wykładniczej liczby zespolone

(a) $-3+3i$, (b) $\dfrac{\sqrt{3}-i}{-1-i}$, (c) $\sin\alpha + i\cos\alpha$, (d) $1 + i\operatorname{tg}\alpha,\ \alpha \neq \pi/2 + k\pi$.

4. Wyznacz części rzeczywiste oraz urojone liczb

(a) $\left(-\sqrt{3}+i\right)^{10}$, (b) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{i-1}\right)^{12}$, (c) $\left(1+\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^{6}$, (d) $\left(\sin\dfrac{\pi}{7} - i\cos\dfrac{\pi}{7}\right)^{14}$.

5. Podane liczby zapisz w postaci trygonometrycznej ($n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}$):

(a) $-(\cos x + i\sin x)^n$, (b) $(\sin x + i\cos x)^n$, (c) $(\sin x - i\cos x)^n$, (d) $(\cos x + i\cos x)^n$.

6. Wyznacz zbiory

(a) $\sqrt{1-\sqrt{3}i}$, (b) $\sqrt[3]{-64}$, (c) $\sqrt[4]{(2-i)^8}$, (d) $\sqrt{3+4i}$.

7. W zbiorze liczb zespolonych równanie $z^n = 1$ posiada n różnych rozwiązań $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$. Wyznacz:

   (a) $w_1 = \varepsilon_0 + \ldots + \varepsilon_{n-1}$;

   (b) $w_2 = \varepsilon_0 \cdot \ldots \cdot \varepsilon_{n-1}$;

   (c) $w_3 = (i+\varepsilon_0)\cdots(i+\varepsilon_{n-1})$.

8. Niech $\{z_0, z_1, \ldots, z_9\} = \sqrt[10]{\cos 1 + i\sin 1}$. Oblicz wartość wyrażenia

$$\frac{|z_0| + 2|z_1| + 3|z_2| + 4|z_3| + 5|z_4|}{z_5^{20} + 2z_6^{20} + 3z_7^{20} + 4z_8^{20} + 5z_9^{20}} \cdot (-\sin 2 + i\cos 2).$$

9. Jednym z wierzchołków sześciokąta foremnego jest $w_0 = \sqrt{3}+i$. Wyznacz pozostałe jego wierzchołki wiedząc, że środek leży w punkcie: (a) $s_0 = 0$; (b) $s_0 = 2\sqrt{3}+1$.

10. ☠ Wykaż, że w ciągu $a_n = \left(\dfrac{2+i}{2-i}\right)^n$ nie występują dwa identyczne wyrazy.

11. Wyznacz miejsca zerowe wielomianu $W(z) = z^3 - (2+3i)^9$.

12. Rozwiąż równanie:

    (a) $z^5 + z^4 + (i-1)z + i - 1 = 0$, (b) $z^4 + 4z^2 + 8 = 0$,

    (c) $(z^2 + 1 + i)^4 + (1+2i)^4 = 0$, (d) $(z+1)^n - (z-1)^n = 0$.

13. Wyznacz wszystkie pierwiastki wielomianu

$$W(z) = z^6 + 2z^5 + 4z^4 + 4z^3 + 5z^2 + 2z + 2\,,$$

którego podwójnym pierwiastkiem jest $z_0 = i$. Następnie przedstaw wielomian W w postaci iloczynu wielomianów rzeczywistych możliwie niskich stopni.

14. Liczba $z_0 = 5 + 2i$ jest jednym z pierwiastków wielomianu

$$W(z) = (z^3 - 11z^2 + 39z - 29)(z^4 - (2-i)^{12});$$

wyznacz pozostałe jego pierwiastki oraz wybierz z nich te, które leżą w drugiej ćwiartce płaszczyzny zespolonej.

15. Liczby z_1, z_2, z_3 to pierwiastki wielomianu $f(z) = -z^3 + 3z^2 + 1$. Znajdź wartość wyrażenia

$$w = (1 + iz_1)(1 + iz_2)(1 + iz_3).$$

16. Liczby z_1, z_2, z_3, z_4 to pierwiastki wielomianu

$$f(z) = -z^4 + (1+i)\,z^3 + iz + 1.$$

Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej zbiór liczb $\lambda \in \mathbb{C}$ spełniających warunek

$$\sum_{k=1}^{4} |\lambda + z_k|^2 < \sum_{k=1}^{4} \left|\overline{\lambda} + z_k\right|^2.$$

17. Wyznacz wszystkie pierwiastki wielomianu

$$w(z) = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n;$$

następnie przedstaw go jako iloczyn rzeczywistych wielomianów stopnia co najwyżej drugiego.

18. Rozwiąż równanie:

    (a) $z^7 = \bar{z}(1-i)$, (b) $\overline{\bar{z}z^4} = z|z|^2$, (c) $\bar{z}z^4 = |z|^2\bar{z}^3$, (d) $|z|^2\bar{z} = -iz^2$.

Zestaw 2. Elementy teorii liczb

1. Korzystając z algorytmu Euklidesa wyznacz największe wspólne dzielniki $\mathrm{NWD}(a, b)$ liczb a, b oraz przedstaw je jako kombinacje całkowitoliczbowe, tj. $\mathrm{NWD}(a, b) = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$, gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Wskaż pary liczb względnie pierwszych.

   (a) $a = 252, b = 231$, (b) $a = 924, b = 1105$, (c) $a = 2891, b = 1589$, (d) $a = 645, b = 363$.

2. Uzasadnij, że istnieją liczby całkowite x, y spełniające poniższe równanie
$$412x + 119y = 1;$$
   wyznacz przykładową parę takich liczb.

3. Udowodnij, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ liczby $5n + 3$ oraz $7n + 4$ są względnie pierwsze.

4. Uzasadnij, że liczba naturalna jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, gdy suma jej cyfr w rozwinięciu dziesiętnym jest liczbą podzielną przez 3. Sformułuj i uzasadnij cechy podzielności liczby naturalnej przez 9 oraz przez 11.

5. Klasyczna cecha podzielności liczby naturalnej przez 7 jest mało wygodna do sprawdzania: liczba jest podzielna przez 7, jeśli różnica między liczbą składającą się z trzech ostatnich jej cyfr, a liczbą wyrażoną pozostałymi jej cyframi (lub odwrotnie) dzieli się przez 7.

   Wykaż, że liczba naturalna jest podzielna przez 7 wtedy i tylko wtedy, gdy suma jej cyfr w rozwinięciu ósemkowym jest liczbą podzielną przez 7. Wykorzystując to kryterium sprawdź podzielność przez 7 liczby 812.

6. Rozwiąż kongruencje:

   (a) $7x = 3 \pmod{12}$, (b) $10x = 13 \pmod{23}$, (c) $6x = 9 \pmod{45}$, (d) $12x = 2 \pmod{8}$.

7. Rozwiąż układ kongruencji:
$$\text{(a)} \quad \begin{cases} x = 4 \pmod{6} \\ x = 5 \pmod{35} \end{cases}, \qquad \text{(b)} \quad \begin{cases} x = 4 \pmod{5} \\ x = 3 \pmod{7} \\ x = 2 \pmod{9} \end{cases}.$$

8. Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną, która przy dzieleniu przez $4, 13$ oraz 7 daje odpowiednio reszty $1, 2$ oraz 1.

9. Jeśli podzielić czekoladę na cztery równe części, zostaną dwie kostki; przy podziale na pięć części pozostaną cztery kostki, a przy podziale na trzy części pozostanie jedna kostka. Ile kostek pozostanie przy podziale czekolady na dziesięć równych części?

Zestaw 3. Grupy, pierścienie, ciała

1. Sprawdź, czy poniższe pary tworzą grupę abelową:
   (a) zbiór $\mathbb{Z}$ z działaniem $x \circ y = (-1)^x\, y + (-1)^y\, x$;
   (b) zbiór $\{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$ z działaniem $a \circ b = a^{\ln b}$;
   (c) zbiór $\mathbb{C}$ z działaniem $w \circ z = w + z + iwz$;
   (d) zbiór $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ z działaniem $w \circ z = w + z + iwz$.
2. Wyznacz rząd grupy: (a) $\mathbb{Z}^*_{120}$, (b) $\mathbb{Z}^*_{93}$, (c) $\mathbb{Z}^*_{200}$.
3. Wyznacz element odwrotny dla elementu

   (a) 4 w $\mathbb{Z}^*_7$, (b) 35 w $\mathbb{Z}^*_{101}$, (c) 11 w $\mathbb{Z}^*_{31}$, (d) 24 w $\mathbb{Z}^*_{29}$, (e) 11 w $\mathbb{Z}^*_{120}$.
4. Znajdź wszystkie podgrupy grupy: (a) $\mathbb{Z}_6$, (b) $\mathbb{Z}^*_6$, (c) $\mathbb{Z}^*_8$.
5. Wypisz wszystkie elementy grupy i podaj ich rzędy: (a) $\mathbb{Z}^*_5$, (b) $\mathbb{Z}^*_9$, (c) $\mathbb{Z}^*_{15}$.
6. Sprawdź, czy grupy z poprzedniego zadania są cykliczne oraz wyznacz wszystkie generatory tych z nich, które są cykliczne.
7. Sprawdź, czy zbiór $\mathbb{Z}$ z działaniem $n \circ k = n + k + 1$ tworzy grupę cykliczną; w przypadku pozytywnej odpowiedzi wyznacz wszystkie jej generatory.
8. Wyznacz trzy ostatnie cyfry liczby: (a) 17^{2002}, (b) $7^{4004} - 3^{4004}$.
9. Korzystając z twierdzenia Eulera oblicz: $13^{26} \pmod{20}$, $7^{74} \pmod{30}$, $5^{40} \pmod{18}$.
10. Korzystając z małego twierdzenia Fermata oblicz: $15^{54} \pmod{53}$, $15^{16} \pmod{17}$.
11. Sprawdź, która z poniższych struktur algebraicznych jest pierścieniem, pierścieniem przemienny, pierścieniem z jednością, pierścieniem całkowitym, ciałem, ciałem przemiennym:
    (a) zbiór wielomianów rzeczywistych z naturalnymi działaniami dodawania i mnożenia wielomianów;
    (b) zbiór $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ z naturalnymi działaniami dodawania i mnożenia liczb rzeczywistych;
    (c) $(A, \star, \bullet)$, gdzie $A = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leqslant x < 1\}$ oraz $a \star b = \min(a, b)$, $a \bullet b = \max(a, b)$;
    (d) $(\mathbb{R}[x]_1, +, \circ)$, gdzie $+$ oraz $\circ$ oznaczają dodawanie oraz składanie funkcji.
12. Udowodnij, że
    (a) zbiór $A = \{m + ni : m, n \in \mathbb{Z}\}$ z działaniem dodawania liczb zespolonych tworzy grupę;
    (b) zbiór $B = \{2^n 3^m : m, n \in \mathbb{Z}\}$ z działaniem mnożenia liczb tworzy grupę;
    (c) grupy A i B są izomorficzne.

13. Udowodnij, że

    (a) zbiór $A = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ z działaniami dodawania i mnożenia liczb jest pierścieniem;
    (b) odwzorowanie $f : A \ni a + b\sqrt{3} \longrightarrow a - b\sqrt{3} \in A$ jest automorfizmem pierścienia $(A, +, \cdot)$ w siebie.

14. Wykaż, że w dowolnym pierścieniu dzielnikami zera mogą być jedynie te elementy, które nie posiadają elementu odwrotnego.

15. Niech $A = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ będzie pierwiastkiem algebraicznym stopnia czwartego z jedności, tj. $\varepsilon_k^4 = 1$ dla $k = 0, 1, 2, 3$.

    (a) Wykaż, że zbiór A z działaniem mnożenia liczb zespolonych tworzy grupę. Sprawdź, czy jest to grupa cykliczna, a w przypadku pozytywnej odpowiedzi wskaż wszystkie jej generatory.
    (b) Wyznacz wszystkie homomorfizmy grupy $(\mathbb{Z}_4, +)$ w grupę $(A, \cdot)$. Czy któryś z tych homomorfizmów jest izomorfizmem?

16. Uzasadnij, że każda grupa cykliczna rzędu n jest izomorficzna z grupą $(\mathbb{Z}_n, +)$.

17. Które z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe?

    (a) Każda grupa, której rząd jest liczbą pierwszą jest grupą cykliczną.
    (b) Wszystkie grupy cykliczne tego samego rzędu $n \in \mathbb{N}$ są izomorficzne.
    (c) Grupa cykliczna rzędu $n \in \mathbb{N}$ jest izomorficzna z grupą cykliczną rzędu $m \in \mathbb{N}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m = n$.
    (d) Jeżeli A jest grupą cykliczną rzędu $n \in \mathbb{N}$, a $h : A \to B$ jest homomorfizmem grup, to grupa B również jest grupą cykliczną rzędu n.
    (e) Jeżeli A jest grupą cykliczną rzędu $n \in \mathbb{N}$, a $h : A \to B$ jest izomorfizmem grup, to grupa B również jest grupą cykliczną rzędu n.

18. Wykaż, że odwzorowanie h jest homomorfizmem grupy G_1 w grupę G_2; następnie sprawdź, czy jest ono izomorfizmem:

    (a) $h(z) = |z|$, $G_1 = (\mathbb{C}^*, \cdot)$, $G_2 = (\mathbb{R}_+, \cdot)$;
    (b) $h(n) = n - 3$, $G_1 = (\mathbb{Z}, +)$, $G_2 = (\mathbb{Z}, \circ)$, gdzie $m \circ n = m + n + 3$;
    (c) $h(x) = \ln x$, $G_1 = (\mathbb{R}_+, \cdot)$, $G_2 = (\mathbb{R}, +)$;
    (d) $h(z) = z^5$, $G_1 = (\mathbb{C}^*, \cdot)$, $G_2 = (\mathbb{C}^*, \cdot)$;
    (e) $h(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x)dx$, $G_1 = (\mathcal{C}_{[0,1]}, +)$, $G_2 = (\mathbb{R}, +)$;
    (f) $h(A) = (\det A)^2$, $G_1 = (M^*_{n\times n}(\mathbb{R}), \cdot)$, $G_2 = (\mathbb{R}_+, \cdot)$, gdzie $M^*_{n\times n}(\mathbb{R})$ to zbiór nieosobliwych macierzy rzeczywistych wymiaru $n \times n$.

19. ☠ Znajdź wszystkie homomorfizmy grupy $(\mathbb{Z}_{10}, +)$ w grupę $(\mathbb{Z}_6, +)$.