

# ZESTAW 12

## ELEKTROMAGNETYZM I OPTYKA FİIS-FT-1 S2

Kontakt: Radosław Strzałka, pok. 315/D10, mail: [strzalka@fis.agh.edu.pl](mailto:strzalka@fis.agh.edu.pl)

Zestawy dostępne pod adresem: [http://galaxy.agh.edu.pl/~strzalka/#dydaktyka#eio\\_ft](http://galaxy.agh.edu.pl/~strzalka/#dydaktyka#eio_ft)

Tematyka: Równania Maxwella, prąd przesunięcia; fale elektromagnetyczne, wektor Poyntinga; falowody; fale w materii; transformacje Lorentza pól  $E$  i  $B$ .

- (a) Proszę zapisać równania Maxwella w postaci całkowej i różniczkowej (dokonać odpowiedniego przejścia między tymi postaciami).  
(b) Na podstawie zasady zachowania ładunku oraz równań Maxwella proszę wyprowadzić równanie ciągłości (ładunku).
- [Hennel IV.57] Załóżmy, że indukcja pola magnetycznego wewnątrz długiego cylindrycznego przewodnika o promieniu  $a$  wzrasta proporcjonalnie do czasu:  $B = \beta t$ , natomiast na zewnątrz  $B = 0$ . Zakładamy, że pole  $\vec{B}$  wewnątrz przewodnika jest jednorodne i równoległe do jego osi. Jakie pole elektryczne powstanie wewnątrz i na zewnątrz cylindra?
- [Hennel IV.58] Pomiędzy dwiema okrągłymi płytami o promieniu  $a$ , ustawionymi współosiowo i równoległe, natężenie pola  $\vec{E}$  wzrasta proporcjonalnie do czasu:  $E = \alpha t$ . Na zewnątrz tego kondensatora płaskiego pole  $E = 0$ . Zakładając, że pole  $\vec{E}$  wewnątrz kondensatora jest jednorodne i prostopadłe do płyt, znaleźć pole  $\vec{B}$  wewnątrz i na zewnątrz kondensatora.
- Wyindukowane pole elektryczne opisane jest wektorem:  $\vec{E} = E_0 \cos(2\omega t) \cdot \vec{y} - 3E_0 \sin(\omega t) \cdot \vec{x}$ . Podaj wektor indukcji pola  $\vec{B}$ . *Wskazówka. Skorzystaj z postaci różniczkowej prawa Faradaya.*
- Jak zmienia się w czasie indukcja pola magnetycznego w odległości  $r$  od środka kondensatora płaskiego, stanowiącego element obwodu  $RC$  podczas rozładowywania kondensatora, naładowanego początkowo do ładunku  $Q_0$ ? Przyjmij, że odległość  $r$  jest na tyle duża w porównaniu z rozmiarem kondensatora, że pole  $B$  od kondensatora może być traktowane jak cylindrycznie symetryczne. Wewnątrz kondensatora pole  $\vec{E}$  jest jednorodne. A jakie jest pole  $B$  przed i za kondensatorem (wzdłuż obwodu)?
- (a) Proszę zapisać równania Maxwella dla próżni (bez ładunku i prądów) oraz na ich podstawie wyprowadzić równania falowe fali elektromagnetycznej (dla składowej  $\vec{E}$  i  $\vec{B}$ ).  
(b) Dla płaskiej fali elektromagnetycznej rozchodzącej się w kierunku  $z$  składowa elektryczna ma postać  $\vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{x}$ . Na podstawie (6a) proszę znaleźć postać rozwiązania dla składowej magnetycznej tej fali.
- Zakładając rozwiązania równań falowych dla pól  $\vec{E}$  i  $\vec{B}$  w postaci fali płaskiej  $\vec{E} = \vec{E}_0 f(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ ,  $\vec{B} = \vec{B}_0 f(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$  wykazać, że z równań Maxwella wynika:  
(a) związek między wektorami  $\vec{E}$  i  $\vec{B}$  w postaci  $\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E}$ ,  
(b) poprzeczność fali e-m:  $\vec{k} \cdot \vec{E} = \vec{k} \cdot \vec{B} = 0$ .
- (a) [por. Griffiths R8.1.2] Sformułować zasadę zachowania energii w formie równania ciągłości:
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = 0,$$
gdzie gęstość energii pola e-m:  $u = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right)$ , wektor Poyntinga:  $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B})$ .  
(b) Proszę obliczyć wektor Poyntinga dla biegnącej fali płaskiej  $\vec{E} = (0, 0, E_0 \cos(ky - \omega t))$ .  
(c) Policz średnią wielkość wektora Poyntinga i na tej podstawie wielkość natężenia fali e-m i ciśnienia promieniowania, jakie wywiera fala na powierzchnię pochłaniającą.
- [openstax.pl 16.67] Mikroskopijna kulista cząstka kurzu o promieniu  $2 \mu\text{m}$  i masie  $10 \mu\text{g}$  porusza się w przestrzeni kosmicznej ze stałą prędkością  $30 \text{ cm/s}$ . Fala świetlna biegnąca w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu cząsteczki kurzu pada na nią i zostaje zaabsorbowana. Zakładając, że do chwili zatrzymania cząstka porusza się ruchem jednostajnie opóźnionym w czasie  $1 \text{ s}$ , oblicz średnią wartość amplitudy pola elektrycznego tej fali.

10. Określić jakie warunki muszą spełniać parametry składowych  $E_x = E_{0x} \cos(\tau + \varphi_{0x})$  i  $E_y = E_{0y} \cos(\tau + \varphi_{0y})$  monochromatycznej płaskiej fali elektromagnetycznej, aby fala była spolaryzowana (i) liniowo, (ii) kołowo prawoskrętnie, (iii) kołowo lewoskrętnie, (iv) eliptycznie.
11. [por. Griffiths 9.5.2] Dany jest „jednowymiarowy falowód” o szerokości  $a$ , rozciągający się w kierunku osi  $z$  (bok  $a$  jest równoległy do osi  $x$ ). Do falowodu wpuszczamy falę elektromagnetyczną, dla której pole  $\vec{E}$  ma tylko składową  $y$ . Ze względu na fakt, że składowa styczna pola  $\vec{E}$  musi znikać na powierzchni metalu musimy narzucić warunki brzegowe:  $E_y(x=0) = E_y(x=a) = 0$ . Najprostsze rozwiązanie równania falowego dla fali biegnącej, spełniające te warunki, ma postać:

$$E_y(x, z, t) = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp[i(\omega t - kz)]$$

- (a) Wstawiając takie rozwiązanie do równania falowego, znaleźć zależność, jaką muszą spełniać wielkości  $k$  i  $\omega$ , aby to rozwiązanie było poprawne.
- (b) Narysować wykres  $\omega(k)$ , czyli tzw. relację dyspersji. Ustalić wartość częstości granicznej (nazywanej też częstością odcięcia) i skomentować fakt braku rozwiązań dla częstości niższych.
- (c) Obliczyć prędkość fazową i prędkość grupową dla takiej relacji dyspersji.
- (d) Spróbować odtworzyć wyniki dla prostokątnego falowodu o wymiarach  $a$  i  $b$  (bok  $b$  równoległy do osi  $y$ ). Wtedy  $E_y(x, y, z, t) = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \exp[i(\omega t - kz)]$ .
12. [por. Griffiths 9.4] Fala płaska rozchodząca się w dodatnim kierunku  $x$  spolaryzowana jest tak, że pole  $\vec{E}$  ma tylko składową  $z$ , zaś pole  $\vec{B}$  ma tylko składową  $y$ . Fala ta pada na ścianę metalu o przewodnictwie właściwym  $\sigma$ , rozciągającą się dla  $x > 0$ .
- (a) Korzystając z równań Maxwella w postaci różniczkowej (bez ładunku swobodnego, ale z prądem przesunięcia) oraz z mikroskopowego prawa Ohma wyprowadzić równanie, jakie spełnia ta fala w metalu (poprzez analogię do wyprowadzenia równania falowego).
- (b) Założyć rozwiązanie tego równania w postaci  $\vec{E} = E_0 e^{i\lambda x} e^{i\omega t} \hat{z}$  i znaleźć takie (zespolone)  $\lambda$ , aby równanie było spełnione.
- (c) Następnie wybrać tylko taką wartość  $\lambda$ , która może być realizowana fizycznie. Jak należy interpretować zależność przestrzenną amplitudy fali w postaci zespolonej eksponenty?

Przydatna tożsamość:  $\sqrt{a + ib} = x + iy$ , gdzie  $x = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$ ,  $y = \frac{b}{2x}$ , np.  $\sqrt{3 - 4i} = \pm 2 \mp i$ .

- 13.\* [Hennel IV.62] Transformacje Lorentza pól elektrycznego i magnetycznego przyjmują postać (podobną jak dla  $x, t$ ,  $1/\gamma^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2}$ ):

$$\begin{aligned} \vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel}, & \vec{B}'_{\parallel} &= \vec{B}_{\parallel} \\ \vec{E}'_{\perp} &= \gamma \left( \vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}_{\perp} \right), & \vec{B}'_{\perp} &= \gamma \left( \vec{B}_{\perp} - \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}_{\perp} \right), \end{aligned}$$

gdzie ' $\parallel$ ' oraz ' $\perp$ ' oznaczają składowe, odpowiednio, równoległe i prostopadłe do wektora prędkości układu primowanego  $\vec{v}$ . Udowodnić, że wielkości  $\vec{E} \cdot \vec{B}$  oraz  $E^2 - c^2 B^2$  są niezmiennikami transformacji Lorentza.