

ZESTAW 13

ELEKTROMAGNETYZM I OPTYKA FİIS-FT-1 S2

Kontakt: Radosław Strzałka, pok. 315/D10, mail: strzalka@fis.agh.edu.pl

Zestawy dostępne pod adresem: http://galaxy.agh.edu.pl/~strzalka/#dydaktyka#eio_ft

Tematyka: Fale e-m w ośrodku, współczynnik załamania światła, współczynnik transmisji i odbicia; wzory Fresnela; polaryzacja; dyfrakcja i interferencja

- [por. Griffiths R.9.3.1] Zapisz równania Maxwella w ośrodku materialnym (liniowym i jednorodnym, tzn. o stałych w czasie ϵ_r i μ_r) bez swobodnych ładunków i prądów.
 - Jaka jest definicja współczynnika załamania ośrodka materialnego?
 - Na płaską granicę rozdziału dwóch izotropowych ośrodków materialnych o współczynnikach załamania n_1 i n_2 pada prostopadle fala elektromagnetyczna płaska. Wyznaczyć współczynnik odbicia R i współczynnik transmisji T dla tej fali, tj. stosunek odpowiednich natężeń fali (odbitej / przechodzącej do padającej). Pokazać, że $R + T = 1$. Obliczyć R i T dla fali padającej z powietrza ($n_1 = 1$) na szkło ($n_2 = 1,52$).
 - Ile wynoszą R i T dla dwóch ośrodków o względnych przenikalnościach elektrycznych i magnetycznych równych $\epsilon_1 = 2$, $\epsilon_2 = 8$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$? (*Komentarz. Dla większości ośrodków przezroczystych $\mu_r \approx 1$, stąd $n \approx \sqrt{\epsilon_r}$.*)
- [por. Griffiths R.9.3.2] Rozważyć falę padającą na granicę dwóch ośrodków materialnych ukośnie (np. pod kątem θ_i). Na podstawie warunków brzegowych (ciągłość składowych równoległych i prostopadłych) wyprowadzić 3 podstawowe prawa optyki geometrycznej: (I) promień padający, odbity i załamany leżą w jednej płaszczyźnie, (II) kąt padania θ_i jest równy kątowi odbicia θ_r , (III) prawo załamania (prawo Snella): $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$.
- [por. Griffiths R.9.3.3] Zapisać wzory (równania) Fresnela na amplitudy fali odbitej i przechodzącej jako funkcji amplitudy fali padającej pod kątem θ_i przy polaryzacji w płaszczyźnie padania. Pokazać jak wzory te redukują się dla padania prostopadłego ($\theta_i = 0^\circ$) i prawie stycznego ($\theta_i \approx 90^\circ$). Znaleźć wyrażenie na kąt Brewstera (kąt całkowitej polaryzacji wiązki odbitej - fala odbita jest wtedy wygaszona). Ile wynosi kąt Brewstera dla szkła? (*) Wyprowadź wzory Fresnela.
- Wyprowadź zależność amplitudy i natężenia fali przechodzącej przez polaryzator w dwóch przypadkach: (i) fala padająca jest spolaryzowana, a kąt między kierunkiem polaryzacji fali i polaryzatora jest φ , (ii) fala padająca jest niespolaryzowana. Następnie rozwiąż zadanie: 3 polaryzatory ustawione są jeden za drugim tak, że kierunki polaryzacji sąsiednich polaryzatorów skrócone są o 45° . Jaki ułamek natężenia padającej wiązki światła niespolaryzowanego będzie stanowić natężenie światła po przejściu przez ten układ? Jak zmieni się wynik, jeśli usuniemy środkowy polaryzator?
- [openstax.pl T.3 R.3 Z.58] Przyjmij, że najwyższy rząd maksimum interferencyjnego obserwowanego w obrazie interferencyjnym z dwóch szczelin oświetlonych światłem o długości 550 nm to 8. Jaka jest najmniejsza odległość pomiędzy szczelinami?
- [openstax.pl T.3. R.3 Z.90] 51 wąskich szczelin jest równomiernie rozłożonych i wzajemnie oddalonych od siebie o 0,1 mm. Szczeliny są oświetlone światłem niebieskim o długości fali 400 nm. Jakie jest kątowne położenie 25. pobocznego maksimum? Jakie jest jego natężenie w porównaniu z natężeniem maksimum głównego?
- [openstax.pl T.3 R.4.2] Wyprowadź wzór na natężenie światła o długości fali λ w dyfrakcji na pojedynczej szczelinie o szerokości D w zależności od kąta ugięcia θ : $I = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$, gdzie $\beta = \frac{\pi D \sin \theta}{\lambda}$. *Wskazówka. W wyprowadzeniu na openstax.pl wykorzystano metodę wskazów.*
- [openstax.pl T.3 R.4. Z.120] Przez zróżniczkowanie równania na natężenie światła w dyfrakcji na pojedynczej szczelinie pokaż, że maksima wyższego rzędu pojedynczej szczeliny dyfrakcyjnej występują przy wartościach β , które spełniają warunek $\tan \beta = \beta$. Następnie metodą graficzną pokaż, że maksima nie pojawiają się dokładnie w pozycjach $\beta = (n + \frac{1}{2})\pi$, gdzie $n = 1, 2, \dots$, ale są bardzo blisko tych wartości. *Wskazówki. Wykreśl $y = \tan \beta$ i $y = \beta$ jako funkcje β i znajdź punkty przecięcia tych dwóch krzywych.*

9. [Baj III.8.] *Natężenie w dyfrakcji na pojedynczej szczelinie - raz jeszcze.* Dokładniejsza teoria dyfrakcji (rozwiązana przez Fresnela i Kirchhoffa) podaje wzór dyfrakcyjny Fresnela-Kirchhoffa, który w przybliżeniu dyfrakcji Fraunhofera na otworze o powierzchni S przy prostym padaniu przyjmuje postać:

$$I(\theta, \varphi) = I_0 \cdot \frac{1}{S^2} \left| \iint_S e^{-ik(x \sin \theta + y \sin \varphi)} dx dy \right|^2 \quad (1)$$

gdzie θ, φ - kąty kierunkowe fali ugiętej względem kierunków x i y w poprzek otworu. Wykorzystaj ten wzór do obliczenia obrazu dyfrakcyjnego na pojedynczym otworze o szerokości D np. wzdłuż kierunku x) oraz nieskończenie krótkiego (wzdłuż y). Zauważ, że dla takiego otworu można położyć $\varphi = 0$.

10. [Baj. III.13.] Wykazać, że niezależnie od kształtu otworu obraz dyfrakcyjny Fraunhofera ma środek symetrii, tzn. $I(\theta, \varphi) = I(-\theta, -\varphi)$.

- 11.* [Baj III.9.] Znaleźć rozkład kątowny natężenia światła ugiętego $I(\theta)$ dla przypadku dyfrakcji Fraunhofera na otworze kołowym o średnicy D . Światło monochromatyczne o długości fali λ pada prostopadle do płaszczyzny otworu, a kąt θ mierzymy od kierunku wiązki padającej. Korzystając z tablic pokazać, że pierwszy ciemny prążek występuje pod kątem $\theta_1 \approx 1,22 \lambda/D$. *Wskazówka.* Korzystając z symetrii osiowej zapisać całkę we wzorze (1) we współrzędnych biegunowych, a następnie rozwinąć wyrażenie podcałkowe w szereg i scałkować wyraz po wyrazie. Otrzymany szereg sprowadzić do funkcji Bessela I rodzaju: $J_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1}$

12. [Baj III.17.] Znaleźć obraz dyfrakcyjny Fraunhofera $I(\theta)$ pochodzący od układu dwóch równoległych bardzo długich szczelin o szerokościach a ; środki szczelin są od siebie oddalone o d . Następnie:

- naszkicować rozkład natężenia $I(\theta)$ dla przypadków $d = 2a$ i $d \gg a$ (np. $d = 10a$) i porównać z obrazem dla pojedynczej szczeliny o szerokości a ;
- pokazać, że dla przypadku $d = a$ otrzymujemy znane wyrażenie na dyfrakcję na pojedynczej szczelinie o szerokości $2a$.

Wskazówka. Wykorzystaj wzór (1) z uproszczeniem dla nieskończenie długiej szczeliny.

13. [openstax.pl T.3 R.4 Z.34] Dwie szczeliny o szerokości $2 \mu\text{m}$ każda, wykonane w nieprzezroczystym materiale, są w odległości takiej, że ich środki są oddalone od siebie o $6 \mu\text{m}$. Na taką podwójną szczelinę pada monochromatyczne światło o długości fali 450 nm . Na ekranie powstaje połączenie obrazu interferencyjnego i dyfrakcyjnego.

- Ile prążków interferencyjnych będzie obserwowanych w obszarze centralnego maksimum dyfrakcyjnego?
- Ile prążków interferencyjnych będzie obserwowanych, jeśli zwiększymy dwukrotnie szerokość szczeliny przy zachowaniu takiej samej odległości pomiędzy szczelinami?
- Ile prążków interferencyjnych będzie obserwowanych, jeśli odległość między szczelinami wzrośnie dwukrotnie do $12 \mu\text{m}$ przy zachowaniu takiej samej szerokości szczelin?
- Co zmieni się w punkcie (a), gdy użyjemy światła o długości fali 680 nm ?
- Ile wynosi stosunek wartości natężeń piku centralnego i następnego jasnego piku w punkcie (a)? Czy stosunek ten zależy od długości fali światła? Czy stosunek ten zależy od odległości między szczelinami?

14. [Baj III.22., por. Baj III.21] Znaleźć obraz dyfrakcyjny Fraunhofera $I_N(\theta)$ transmisyjnej siatki dyfrakcyjnej, składającej się z N ostrych, pionowych, wąskich szczelin o szerokości a i odległości wzajemnej d . Jaki musi być związek między parametrami a i d , aby w widmie dyfrakcyjnym nie pojawiło się maksimum główne n -tego rzędu?

Wskazówki. W przypadku gdy amplituda fal wtórnych, opuszczających otwór nie jest jednakowa na całej powierzchni otworu, możemy uwzględnić ten efekt, wprowadzając tzw. funkcję transmisji $T(x, y)$ modyfikującą amplitudę fali padającej. Wzór (1) modyfikuje się wtedy do postaci transformacji Fouriera z funkcji transmisji. Dla siatki dyfrakcyjnej złożonej z N identycznych szczelin rozmieszczonych w odległościach co d od siebie, funkcja transmisji jest periodyczna, tj. $T(x + d) = T(x)$, i wzór dyfrakcyjny przyjmuje postać (pokazanie tego wzoru jest treścią zad. III.21. ze zbioru Baj):

$$I_N(\theta) = \frac{\sin^2\left(\frac{Nkd\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{kd\theta}{2}\right)} \left| \frac{\int_0^d T(x) e^{-ik\theta x} dx}{\int_0^d T(x) dx} \right|^2 \quad (2)$$

Wykorzystaj wzór (2) z funkcją transmisji $T(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{dla } a < x < d \end{cases}$