

## ZESTAW 5

Kontakt: Radosław Strzałka, pok. 315/D10, mail: [strzalka@fis.agh.edu.pl](mailto:strzalka@fis.agh.edu.pl)

Zestawy dostępne pod adresem: [http://galaxy.agh.edu.pl/~strzalka/#dydaktyka#eio\\_ft](http://galaxy.agh.edu.pl/~strzalka/#dydaktyka#eio_ft)

Tematyka: UZUPEŁNIENIE DOT. DIPOLA ELEKTRYCZNEGO.

### Wyprowadzenie potencjału pola $V(r)$ od dipola

Przyjmijmy, że dipol ustawiony jest pionowo z ładunkiem dodatnim  $+q$  powyżej ujemnego  $-q$ . Odległość  $r$  od dipola mierzona jest od jego środka, a kąt  $\theta$  mierzony jest od osi dipola (pionu) do wektora wodzącego  $\vec{r}$ . Rozmiar dipola (odległość między ładunkami) wynosi  $d$ , wektor  $\vec{d}$  skierowany jest od  $-q$  do  $+q$ , zatem moment dipolowy  $\vec{p} = q\vec{d}$  jest też ustawiony pionowo (patrz: Rys. 1).

Zakładamy (od razu), że odległość do pewnego punktu P na płaszczyźnie jest duża w porównaniu z rozmiarem dipola ( $r \gg d$ ). Wtedy odległości do punktu P od ładunku dodatniego oraz ujemnego wynoszą:

$$\begin{aligned} r_+ &= r - \frac{d}{2} \cos \theta \\ r_- &= r + \frac{d}{2} \cos \theta \end{aligned} \quad (1)$$

Potencjał w punkcie P jest, zgodnie z zasadą superpozycji, równy:

$$V = V_+ + V_- = \frac{kq}{r_+} - \frac{kq}{r_-} = kq \left( \frac{1}{r - \frac{d}{2} \cos \theta} - \frac{1}{r + \frac{d}{2} \cos \theta} \right) = \frac{kqd \cos \theta}{r^2 - \frac{d^2}{4} \cos^2 \theta} \quad (2)$$

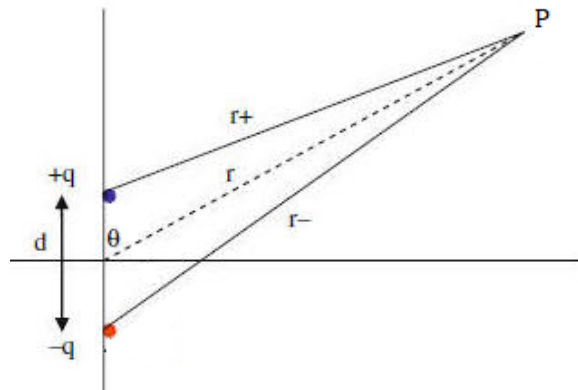
Jeszcze raz zrobimy przybliżenie  $r \gg d$ , które pozwala pominąć wyraz  $\sim d^2$  w mianowniku. Zauważmy też od razu, że  $qd = p$ . Ostatecznie, dla dużych odległości od dipola, mamy wzór na potencjał:

$$\boxed{V(r) = \frac{kp \cos \theta}{r^2}} \quad (3)$$

Powyższy wzór często zapisuje się w postaci wektorowej, zauważając, że kąt wektory  $\vec{p}$  i  $\vec{r}$  tworzą kąt  $\theta$ :

$$V(\vec{r}) = \frac{k\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{k\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2} \quad (4)$$

Ważnym wnioskiem wynikającym z postaci wzoru (3) jest to, że potencjał od dipola maleje z kwadratem odległości (jak  $1/r^2$ ), zasadniczo inaczej niż w przypadku ładunku punktowego (monopola). Ponadto łatwo zauważymy, że potencjał się zeruje na symetralnej dipola ( $\theta = \pm 90^\circ$ ), natomiast dla punktów na osi dipola ( $\theta = 0$  lub  $180^\circ$ ) dany jest prostą zależnością  $V = \frac{kp}{r^2}$ , tzn. dla danego  $r$  potencjał jest maksymalny w punktach na osi dipola. To jednoznacznie sugeruje, że linie stałego potencjału (ekwipotencjalne) nie są okręgami, ale mają kształt okręgów spłaszczonych w kierunku osi dipola (pionowym) - patrz: Rys. 2.



Rysunek 1

## Wyprowadzenie potencjału pola $V(x,y)$ od dipola trochę bardziej ogólnie

Możemy znaleźć zależność potencjału od współrzędnych  $x$  i  $y$  punktu P. Z rys. 1 zauważymy, że wektory wodzące od ładunków do punktu P mają postać:

$$\begin{aligned}\vec{r}_+ &= \vec{r} - \frac{d}{2} = \left(x, y - \frac{d}{2}\right) \\ \vec{r}_- &= \vec{r} + \frac{d}{2} = \left(x, y + \frac{d}{2}\right)\end{aligned}\quad (5)$$

Potencjał wyliczymy, stosując zasadę superpozycji:

$$V = V_+ + V_- = \frac{kq}{|\vec{r}_+|} - \frac{kq}{|\vec{r}_-|} = kq \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{d}{2}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + \left(y + \frac{d}{2}\right)^2}} \right) = \frac{kq}{r} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{d^2 - yd}{r^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{d^2 + yd}{r^2}}} \right) \quad (6)$$

Otrzymaliśmy ogólny wzór, w którym nie ma (na razie) żadnych przybliżeń. Wzór jest dość „paskudny”, dlatego teraz znajdziemy jego przybliżoną postać dla  $d \ll r$ . Po pierwsze pominiemy wyrazy  $\frac{d^2}{4}$ . Po drugie rozwinimy pozostałe wyrażenie w nawiasie w szereg wokół  $\frac{yd}{r^2} \rightarrow 0$ . To rozwinięcie daje:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{yd}{r^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{yd}{r^2}}} \approx \frac{yd}{r^2} \quad (7)$$

Zatem:

$$V(x,y) = \frac{kq}{r} \frac{yd}{r^2} = \boxed{kqd \cdot \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}} \quad (8)$$

Powyższy wzór (8) dobrze odtwarza przypadki szczególne, tzn. dla  $y = 0$  (na symetralnej dipola, czyli dla  $\theta = 90^\circ$ ) potencjał wynosi 0, zaś dla  $x = 0$  (na osi dipola, czyli dla  $\theta = 0^\circ$ ) potencjał wynosi  $\frac{kqd}{y^2}$ . Jeśli na koniec przypomnimy sobie, że  $\frac{y}{r} = \cos \theta$  (rys. 1), to zauważymy zgodność powyższego wyprowadzenia ze wzorem (3).

## Wyprowadzenie natężenia pola $\vec{E}$ od dipola w układzie kartezjańskim

Natężenie pola  $\vec{E}$  zawsze możemy policzyć jako gradient potencjału ( $\vec{E} = -\text{grad}V$ ), jednak nie zawsze to będzie pochodna po  $r$ . Pole elektrostatyczne, choć wytwarzane przez ładunki punktowe, nie zawsze jest centralne, tzn. nie zależy tylko od odległości  $r$ , ale też od kierunku, np. kąta, a więc od całego wektora  $\vec{r}$ . W istocie, w przypadku pola wytwarzanego przez układ ładunków punktowych (superpozycja) pole wypadkowe nie będzie centralne. Zatem nie można różniczkować tylko po  $r$ . Zawsze można obliczyć gradient w zmiennych kartezjańskich. W naszym przypadku należy zatem wcześniej zauważyć zależność wektora wodzącego  $\vec{r}$  (w szczególności kąta  $\theta$  od  $x, y$ ). Wybierzmy układ współrzędnych, którego oś  $y$  leży wzdłuż dipola, a oś  $x$  na symetralnej odcinka  $d$ . Wtedy  $\cos \theta = \frac{y}{r}$ . Zatem przepisemy:

$$V(x,y) = \frac{kp}{r^2} \frac{y}{r} = \frac{kpy}{r^3} \quad (9)$$

$$\vec{E}(x,y) = (E_x, E_y) = -\text{grad}V(x,y) = \left( -\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y} \right) \quad (10)$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -kpy \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r^3} \right) = -kpy \left( \frac{-3}{r^4} \right) \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{3kpy}{r^4} \cdot \frac{x}{r} = \left| \frac{x}{r} = \sin \theta \right| = \boxed{\frac{3kp \cos \theta \sin \theta}{r^3}} \quad (11)$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -kp \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{r^3} \right) = -kp \left( \frac{1}{r^3} - \frac{3y}{r^4} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} \right) = \frac{kp}{r^3} \left( \frac{3y}{r} \cdot \frac{y}{r} - 1 \right) = \left| \frac{y}{r} = \cos \theta \right| = \boxed{\frac{kp(3 \cos^2 \theta - 1)}{r^3}} \quad (12)$$

Wektor  $\vec{E}$  da się zapisać w bardziej zwartej postaci:

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \frac{3(\vec{p} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p}}{r^3} \quad (13)$$

Wartość natężenia pola w odległości  $r$  od dipola dana jest wzorem:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{kp}{r^3} \sqrt{(3 \cos \theta \sin \theta)^2 + (3 \cos^2 \theta - 1)^2} = \boxed{\frac{kp}{r^3} \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1}} \quad (14)$$

Sprawdźmy szczególne przypadki, podobnie jak dla potencjału. Jeżeli patrzymy na dipol z punktu na osi dipola w odległości  $r$  od jego środka, to  $\theta = 0$  lub  $180^\circ$ . Wtedy  $\cos \theta = \pm 1$  a  $\sin \theta = 0$ . Zatem  $E_x = 0$ ,  $E_y = \frac{2kp}{r^3}$

oraz  $E = \frac{2kp}{r^3}$ . W punktach wzdłuż osi dipola pole  $\vec{E}$  jest zwrócone w górę osi  $y$  (czyli zgodnie z wektorem  $\vec{p}$ ). Zauważmy, że w tym przypadku  $E(r) = \frac{dV(r)}{dr}$ , a to dlatego, że układ ładunków jest rozłożony wzdłuż wektora  $\vec{r}$  (nie ma zależności od kierunku/kąta).

Drugi skrajny przypadek to punkty na symetralnej dipola, czyli  $\theta = \pm 90^\circ$ . Wówczas  $E_x = 0$ ,  $E_y = -\frac{kp}{r^3}$  oraz  $E = \frac{kp}{r^3}$ . Pole  $\vec{E}$  w punktach na symetralnej dipola jest skierowane „antyrównoległe” do wektora  $\vec{p}$  (w dół osi  $y$ ). Przypomnijmy, że potencjał w tych punktach był zerowy,  $V(\theta = \pm 90^\circ) = 0$ .

Na koniec uwaga, że (oczywiście)  $E \neq -\frac{dV}{dr}$ , co widać z postaci wzorów (3) i (14). Spodziewanym wnioskiem jest jednak taki, że skoro dla dipola mamy  $V \sim 1/r^2$ , to musi być także  $E \sim 1/r^3$ .

### Wyprowadzenie natężenia pola $\vec{E}$ od dipola w zmiennych biegunowych

Gradient na płaszczyźnie możemy też wyliczyć w zmiennych biegunowych (tak jak chyba było to na wykładzie). Należy wtedy zapisać operator nabra w zmiennych  $(r, \varphi)$  układu biegunowego (wyprowadzenie jego postaci jest zadaniem samym w sobie, pomińmy je teraz):

$$\nabla_{r,\varphi} = \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \quad (15)$$

Przypomnijmy, że zmienne  $r$  i  $\varphi$  są w układzie biegunowym niezależne oraz, że kąt  $\varphi$  jest mierzony od osi  $x$  (umowa). W naszym wyprowadzeniu wzoru (3) przyjęliśmy inną konwencję: kąt  $\theta$  jest mierzony od osi dipola, z którą związaliśmy oś  $y$  układu kartezjańskiego. Zatem  $\theta = 90^\circ - \varphi$ . Wróćmy do postaci (3) wzoru na potencjał, ale zapiszmy ją przy pomocy zmiennej  $\varphi$ :

$$V(r, \theta) = \frac{kp \cos \theta}{r^2} \quad \rightarrow \quad V(r, \varphi) = \frac{kp \sin \varphi}{r^2} \quad (16)$$

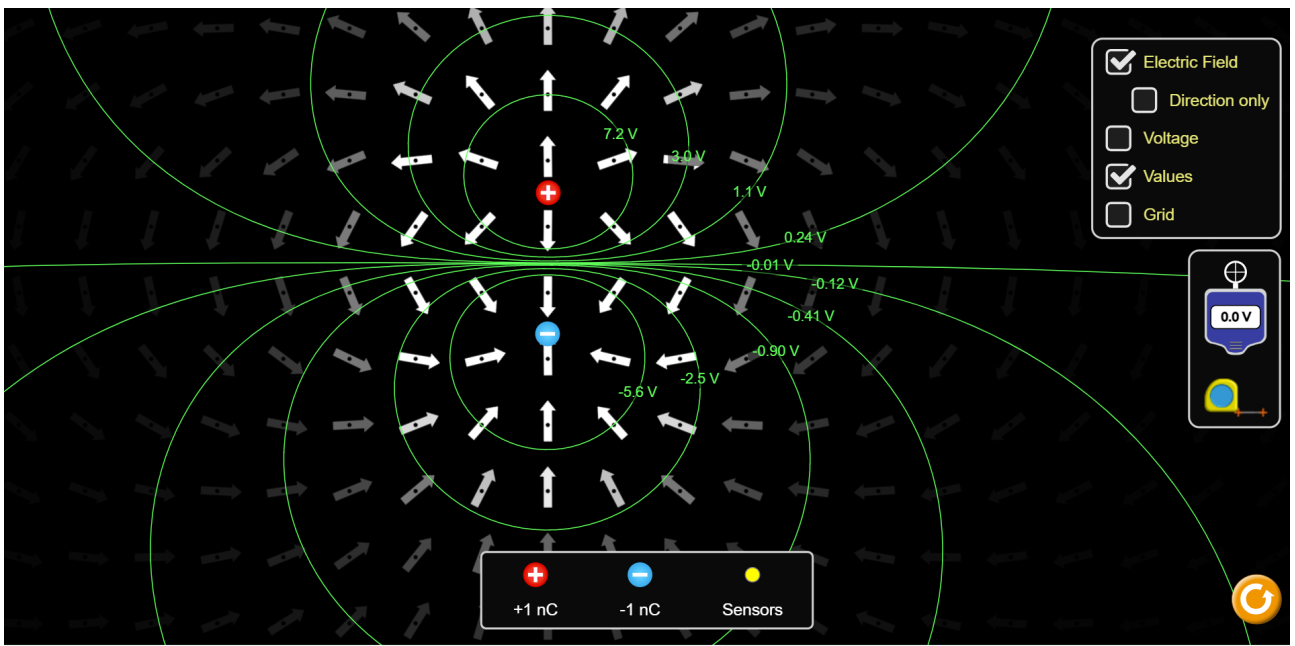
Obliczmy gradient potencjału:

$$\begin{aligned} \vec{E} = -\nabla_{r,\varphi} V(r, \varphi) &= - \left( \frac{\partial V}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) = -kp \left( \sin \varphi \cdot \frac{-2}{r^3}, \frac{1}{r^3} \cdot \cos \varphi \right) = \frac{kp}{r^3} (2 \sin \varphi, -\cos \varphi) \\ &= \boxed{\frac{kp}{r^3} (2 \cos \theta, -\sin \theta)} \end{aligned} \quad (17)$$

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\varphi^2} = \frac{kp}{r^3} \sqrt{3 \sin^2 \varphi + 1} = \boxed{\frac{kp}{r^3} \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1}} \quad (18)$$

Zauważmy, że współrzędne wektora  $\vec{E}$  są (oczywiście) inne niż we wzorach (11) i (12), ale długość wektora jest (oczywiście) taka sama. Podobnie, w pozycjach  $\theta = 0$  lub  $180^\circ$  lub  $\pm 90^\circ$  wektor jest skierowany także wzdłuż pionowej osi (transwersalnej  $\equiv y$ ).

Pole elektryczne wytwarzane przez dipol może być zobrazowane za pomocą linii pola (wektory  $\vec{E}$ ) oraz linii ekwipotencjalnych ( $V = \text{const}$ ). Poniżej na Rys. 2 obraz pola od dipola uzyskany przy pomocy apletu Uniwersytetu Colorado ([link](#)).



Charges and Fields



Rysunek 2