

ZESTAW 6

ELEKTROMAGNETYZM I OPTYKA FIIS-FT-1 S2 GR. 1

Kontakt: Radosław Strzałka, pok. 315/D10, mail: strzalka@fis.agh.edu.pl

Zestawy dostępne pod adresem: http://galaxy.agh.edu.pl/~strzalka/#dydaktyka#eio_ft

Tematyka: metoda obrazów, ładunek wyindukowany; energia pola $\vec{E}$; pojemność elektryczna, kondensatory, połączenia kondensatorów; dielektryki.

- Cykl kilku zadań dot. metody obrazów.
 - Ładunek punktowy $+q$ umieszczony jest w odległości d nad nieskończoną uziemioną przewodzącą płaszczyzną xy . Oblicz rozkład potencjału $V(z)$ nad tą płaszczyzną oraz gęstość powierzchniową σ ładunku wyindukowanego na płaszczyźnie.
 - [por. Hennel III.34] Ładunek punktowy $+q$ znajduje się w odległości d od środka uziemionej przewodzącej kuli o promieniu R ($R < d$). Znaleźć potencjał wytworzony przez ładunek w dowolnym punkcie na zewnątrz kuli oraz gęstość powierzchniową ładunku wyindukowanego na jej powierzchni.
 - (*) [Griffiths 3.8, por. Hennel III.35] Jakiego drugiego ładunku należy użyć i w którym miejscu należy go umieścić, aby kulę z zad. 1b utrzymywać pod dowolnym stałym potencjałem V_0 (względem nieskończoności). Obliczyć siłę przyciągania między ładunkiem punktowym $+q$ a nienaładowaną przewodzącą kulą.
 - [Griffiths 3.9] Nieskończony prostoliniowy drut naładowany jednorodnie z gęstością liniową λ znajduje się w odległości d nad uziemioną, przewodzącą, nieskończoną płaszczyzną (można założyć, że płaszczyzna leży w xy , a drut ciągnie się wzdłuż x przy $y = 0, z = d$). Znaleźć potencjał w dowolnym punkcie nad płaszczyzną oraz gęstość powierzchniową ładunku wyindukowanego na niej.
Wskazówka. Na podstawie zad. 3 z Zestawu 5 wiemy, że potencjał od nieskończonego pręta wynosi $V(r) = -2k\lambda \ln \frac{r}{r_0}$, gdzie r_0 jest położeniem punktu referencyjnego, w którym $V = 0$.
- [Brański II.26] Proszę wyznaczyć energię oddziaływania z polem oraz moment siły działający na dipol elektryczny o momencie dipolowym $\vec{p}$ w polu elektrostatycznym $\vec{E}$.
- [Hennel III.45] Oblicz energię potencjalną jednorodnie naładowanej sfery o promieniu R i gęstości powierzchniowej ładunku σ na 2 sposoby: (i) poprzez obliczenie pracy niezbędnej na przeniesienie odpowiedniego ładunku z nieskończoności na sferę; (ii) poprzez scałkowanie gęstości energii pola elektrycznego.
- [Griffiths 2.32, 2.33, 2.43, 2.45] Obliczyć energię zgromadzoną w kuli o promieniu R : (i) jednorodnie naładowanej ładunkiem Q ; (ii) naładowanej ładunkiem o gęstości objętościowej $\rho(r) = kr$ (k - stała).
Wskazówka. Zadania można rozwiązać na kilka sposobów.
- Oblicz natężenie pola wytworzonego przez (i) nieskończoną płaszczyznę naładowaną jednorodnie ładunkiem powierzchniowym σ ; (ii) układ dwóch nieskończonych płyt o grubości x i ładunkach powierzchniowych $\pm\sigma$ (przeciwnego znaku) ustawionych równolegle. Na tej podstawie wyprowadź wzór na pojemność kondensatora płaskiego o powierzchni okładek S i odległości między nimi d , wypełnionego próżnią.
- Wyprowadź wzór na energię pola elektrycznego zgromadzoną w kondensatorze. Wyprowadź wzory na pojemność zastępczą układu 2 kondensatorów o pojemnościach C_1 i C_2 połączonych (i) równolegle, lub (ii) szeregowo. Oblicz energie zgromadzone w kondensatorach zastępczych w tych połączeniach.
- [por. openstax.pl 8.72] Trzy kondensatory o pojemnościach $8,4 \mu\text{F}$, $8,4 \mu\text{F}$, $4,2 \mu\text{F}$ połączono szeregowo i przyłożono do nich napięcie 36 V .
 - Oblicz napięcia i ładunki na każdym kondensatorze;
 - Jaka jest całkowita energia zgromadzona w układzie?
 - Kondensatory odłączono od źródła napięcia, nie rozładowując ich. Następnie połączono je równolegle (spinając ze sobą okładki o jednakowych znakach). Jak zmieniła się całkowita energia układu?
- [ODI 2022/23-III-4] Dysponujemy kondensatorem płaskim o zmiennej pojemności równej początkowo C_0 przy początkowej odległości między okładkami $d_0 = 1 \text{ mm}$. Kondensator naładowano do napięcia $U_0 = 100 \text{ V}$ i odłączono od zasilacza. Na krótki czas okładki kondensatora zostały zwarte opornikiem zewnętrznym. Podczas tego zwarcia na oporniku wydzielilo się ciepło ΔW równe połowie początkowej energii zgromadzonej w kondensatorze. Jakie napięcie U_1 ustali się na kondensatorze po odłączeniu opornika od okładek? Jaki ładunek odpłynął z kondensatora? Na jaką odległość d_2 należy następnie rozsunąć okładki kondensatora, aby napięcie na nim wróciło do wartości U_0 ?

9. Wyprowadzić wzory na pojemność następujących kondensatorów:
 - (a) kulistego, złożonego z dwóch współśrodkowych sfer o promieniach R_1 i R_2 ;
 - (b) walcowego, złożonego z dwóch współosiowych walców o promieniach R_1 i R_2 .
10. [ODI 2017/18-II-4] Dwie metalowe kulki o promieniach $R_1 = 1$ cm i $R_2 = 2$ cm, znacznie od siebie oddalone, naładowano do potencjałów odpowiednio $V_1 = 100$ V i $V_2 = 300$ V, a następnie połączono drutem o zaniedbywalnej pojemności.
 - (a) wyprowadź wzór na pojemność elektryczną naładowanej metalowej kuli;
 - (b) oblicz potencjał kulek po ich połączeniu drutem;
 - (c) ile razy zmniejszyła się energia układu po połączeniu kulek drutem; na co poszła ta strata energii?
11. [por. openstax.pl Rozdział 8.5] Wyprowadź wzór na natężenie pola i ładunek indukowany w dielektryku umieszczonym wewnątrz kondensatora płaskiego. Ile wynoszą te wielkości dla kondensatora o powierzchni okładek $S = 45$ cm² i odległości między okładkami $d = 2$ mm wypełnionego teflonem ($\epsilon_r = 2,1$) lub tytanianem baru ($\epsilon_r =$ kilka tysięcy). Podaj definicję podatności elektrycznej χ i zdefiniuj wektor polaryzacji $\vec{P}$ oraz wektor indukcji pola $\vec{D}$ w dielektryku.
12. [Griffiths, Przykład 4.5] Metalowa kula o promieniu a została naładowana ładunkiem Q . Kula otoczona jest powłoką z dielektryka liniowego o przenikalności elektrycznej ϵ , promień powłoki wynosi b . Znaleźć różnicę potencjałów między środkiem kuli a punktem w nieskończoności, a także polaryzację warstwy dielektryka i gęstość objętościową i powierzchniową ładunków związanych.
13. [Griffiths 4.15] Powłoka kulista o promieniu wewnętrznym a i zewnętrznym b wykonana jest z materiału dielektrycznego z „wmrożoną” polaryzacją $\vec{P}(\vec{r}) = \frac{k}{r}\hat{r}$, gdzie k jest stałą, a r - odległością od środka powłoki. W układzie nie występują ładunki swobodne. Znaleźć natężenie pola elektrycznego w trzech obszarach: $r < a$, $a < r < b$ i $r > b$ dwiema metodami:
 - (a) znaleźć ładunek związany i obliczyć pole E za pomocą prawa Gaussa,
 - (b) najpierw znaleźć indukcję pola D , a następnie pole E .
14. Znaleźć pojemności następujących kondensatorów:
 - (a) kondensatora płaskiego o pojemności $C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ z wsuniętą płytką o grubości x ($x < d$) i tej samej powierzchni S , wykonaną z dielektryka o względnej przenikalności elektrycznej ϵ_r . Czy wynik zależy od położenia płytki w kondensatorze? Zrób wykres zależności $C_z(x)$. Podaj wartość C_z dla $x = d/2$.
 - (b) kondensatora kulistego o promieniach R_1 i R_2 , którego dolna połówka została zalana dielektrykiem o względnej przenikalności elektrycznej ϵ_r .
15. Znaleźć pojemność kondensatora płaskiego wypełnionego dielektrykiem, którego przenikalność elektryczna jest funkcją odległości x od jednej z okładek zgodnie z zależnością $\epsilon(x) = \epsilon_0 \left[1 + (\epsilon_r - 1) \frac{x}{a} \right]$ (a - stała równa odległości między okładkami).
16. [por. Hennen III.56] Kondensator płaski, ustawiony pionowo, zanurzony jest częściowo w cieczy o przenikalności ϵ_r i gęstości masy ρ . Napięcie między okładkami jest utrzymywane na stałym poziomie U , a odległość między nimi wynosi d . Wyznaczyć wysokość, na jaką podniesie się ciecz wewnątrz kondensatora. Jaki będzie okres drgań słupa cieczy w kondensatorze, po wychyleniu z położenia równowagi.
17. Dysponujemy kondensatorem płaskim o powierzchni okładek S i odległości między nimi d naładowanym do napięcia U_0 . Wyznaczyć:
 - (a) siłę przyciągania się okładek tego kondensatora bez dielektryka, przy odłączonym źródle napięcia;
 - (b) siłę, z jaką wciągana jest do kondensatora płytka dielektryka o grubości d i stałej ϵ_r przy odłączonym źródle napięcia;
 - (c) jak wyżej, ale z ciągle podłączonym źródłem napięcia.