Równania ruchu metodą całkowania; równanie położenia *vs.* droga; całka nieoznaczona *vs.* oznaczona

Aby na podstawie znajomości zależności przyśpieszenia od czasu, ustalić równanie położenia ciała, musimy użyć całkowania. Procedura ta jest dobrze opisana (dla przypadku 1D) w podręczniku openstax.pl: LINK. W przypadku 3D procedura wygląda dokładnie tak samo, ale powtarzamy ją dla każdej składowej. Niech wektor przyśpieszenia jest następujący: $\vec{a}(t) = [a_x(t), a_y(t), a_z(t)]$. Aby znaleźć współrzędne wektora prędkości $\vec{v}(t)$ oraz położenia $\vec{r}(t)$ w funkcji czasu, obliczamy następujące całki:

$$v_x(t) = \int a_x(t)\mathrm{d}t \quad v_y(t) = \int a_y(t)\mathrm{d}t \quad v_z(t) = \int a_z(t)\mathrm{d}t$$

$$x(t) = \int v_x(t)\mathrm{d}t \quad y(t) = \int v_y(t)\mathrm{d}t \quad z(t) = \int v_z(t)\mathrm{d}t$$

Powyższe całki są całkami nieoznaczonymi, dlatego musimy pamiętać o dopisaniu stałych całkowania, np. dla $a_x(t) = 5t$:

$$v_x(t) = \int a_x(t)\mathrm{d}t = \int 5t\,\mathrm{d}t = \frac{5}{2}t^2 + C_1$$

Stałą C_1 możemy ustalić tylko, jeśli wiemy coś więcej o prędkości w jakiejś chwili. Przykładowo, jeśli dla $t = 2$ s składowa x prędkości ma wartość $v_x = 5$ m/s (ktoś nam to powiedział), to stałą całkowania obliczymy następująco:

$$\begin{cases} v_x(t=2) = 5 \\ v_x(t=2) = \frac{5}{2}\cdot 4 + C_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C_1 = -5\ \mathrm{m/s}$$

Zatem zależność składowej x prędkości od czasu jest ostatecznie: $v_x(t) = \frac{5}{2}t^2 - 5$. Jeżeli znamy prędkość początkową w chwili $t = 0$, czyli $v_x(t = 0) = v_{0x}$, to mówimy wówczas o *warunkach początkowych.*
Analogicznie postępujemy, aby obliczyć składową x położenia:

$$x(t) = \int v_x(t)\mathrm{d}t = \int \left(\frac{5}{2}t^2 - 5\right)\mathrm{d}t = \frac{5}{6}t^3 - 5t + C_2$$

Kolejną stałą całkowania C_2 znajdziemy znowu z warunku, np. początkowego $x(0) = 3 \Rightarrow C_2 = 3$ m, zatem ostatecznie $x(t) = \frac{5}{6}t^3 - 5t + 3$.

Uwaga 1. „Całka z wektora”? Dla przypadku 3D nie możemy zapisać w zwięzłej postaci:

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)\mathrm{d}t$$

(wektor prędkości jako całka z wektora przyśpieszenia). Matematyka nie zna takiego zapisu. Istnieją w matematyce całki z funkcji wektorowych, ale są one bardziej skomplikowane (poznacie je Państwo na 2. i 3. semestrze Analizy). Wynikiem całki, nawet w tych bardziej skomplikowanych przypadkach, nigdy nie jest wektor.
Zatem: aby znaleźć równania ruchu (współrzędne wektora położenia w czasie) metodą całkowania, stosujemy ją dla składowych. Prawdą jest:

$$\vec{v}(t) = [v_x(t), v_y(t), v_y(t)] = \left[\int a_x(t)\mathrm{d}t,\ \int a_y(t)\mathrm{d}t,\ \int a_z(t)\mathrm{d}t\right]$$

Uwaga 2. Przypadek szczególny $\vec{a} = const.$

Ruch ze stałym (w czasie) przyśpieszeniem nazywamy ruchem *jednostajnie zmiennym* (przyśpieszonym lub opóźnionym). Choć jest to bardzo szczególny przypadek, to mamy z nim często to czynienia. Dlatego ogólne równanie ruchu, wynikające z rozwiązania metodą przez całkowanie, warto pamiętać. Zakładamy, że w ruchu ze stałym przyśpieszeniem $\vec{a} = (a_x,a_y,a_z) = const(t)$ warunki początkowe (dla $t = 0$) wynoszą: prędkość początkowa $\vec{v}_0 = (v_{0x},v_{0y},v_{0z})$ oraz położenie początkowe $\vec{r}_0 = (x_0,y_0,z_0)$. W takim razie, w wyniku całkowania stałego wektora przyśpieszenia otrzymujemy:

$$a_x = const(t) \quad \Rightarrow \quad v_x(t) = \int a_x\mathrm{d}t = a_xt + v_{0x} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \int v_x(t)\mathrm{d}t = \int (a_xt + v_{0x})\mathrm{d}t = \frac{1}{2}a_xt^2 + v_{0x}t + x_0$$

Podobnie dla pozostałych zmiennych. Podsumowując, wektor położenia w funkcji czasu w ruchu ze stałym wektorem przyśpieszenia jest następujący:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

Znaki w powyższym ogólnym równaniu ruchu zależą od zwrotu wektorów (znaku składowych) względem osi układu współrzędnych. Np. równanie $x(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ może opisywać ruch ciała poruszającego się w dodatnim kierunku osi x z prędkością początkową i przyśpieszeniem (np. jadąc samochodem ze stałą prędkością nagle zaczynamy przyśpieszać), natomiast równanie $y(t) = h - v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ może opisywać ruch ciała rzuconego pionowo w dół z wysokości h nad ziemią w polu grawitacyjnym.

Droga w ruchu prostoliniowym.

Droga jest długością toru (trajektorii), po jakim porusza się ciało. W przypadku ruchu 1D torem tym jest prosta, więc droga jest długością odcinka. Rozważmy ruch ciała po prostej wzdłuż osi x wg równania $x(t)$. Droga, jaką ciało przebędzie między chwilą t_1, a t_2 wynosi:

$$s = \Delta x = x(t_2) - x(t_1)$$

Zatem w tym przypadku droga jest równa przemieszczeniu ciała. **Ważne!** Powyższy wzór jest słuszny dla przypadku ruchu prostoliniowego **bez zawracania**. Możemy sobie łatwo wyobrazić przypadek, kiedy nasze ciało porusza się początkowo w prawo osi x, hamuje, w pewnym momencie się zatrzymuje, zawraca i porusza w kierunku początku osi. Gdy dotrze z powrotem do położenia $x = 0$, jego przemieszczenie jest 0, ale przecież w między czasie pokonało ileś metrów. Przypadek taki obrazuje np. ruch o równaniu $x(t) = 20t - 5t^2$. Ciało osiąga największą odległość po dodatniej stronie osi x dla chwili $t_1 = 2$ s ($x_{max} = x(t_1) = 20$ m, oczywiście warunek na t_1 jest następujący: $\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t_1} = v(t_1) = 0$). Po czasie $t_2 = 2t_1 = 4$ s dociera z powrotem do miejsca startu. Żeby znaleźć drogę na podstawie równania położenia musimy podzielić ruch na etapy: do osiągnięcia $x_{max} = 20$ m, oraz ruch od momentu zawrócenia. W tym drugim etapie równanie ruchu jest następujące: $x'(t) = 5t^2$ (ciało nadal ma przyśpieszenie, tym razem liczymy położenie od punktu x_{max} w kierunku ruchu ciała, a więc do miejsca $x = 0$; czyli $x' = 0$ w punkcie $x = x_{max}$; podobnie czas zaczynamy liczyć od t_1). Droga pokonana przez ciało np. po $t_3 = 1{,}5t_1 = 3$ s wynosi wówczas $s = x(t_1) + x'(t_3 - t_1) = x_{max} + x'(0{,}5t_1) = 25 + 5 \cdot 1 = 30$ m. To z kolei sprowadza się do: $s = x_{max} + |-5t^2|$, czyli ogólniej: $s = x_{max} + \left|\frac{1}{2}at^2\right|$.

Wygodnie jest czasem zapisać równanie drogi (wzór na drogę w funkcji czasu), choć jest to łatwe tylko dla ruchu jednostajnie zmiennego prostoliniowego. Ogólne równanie jest następujące:

$$s(t) = v_0 \pm \frac{1}{2}at^2$$

Przyjmujemy taką konwencję: jeśli ruch jest przyśpieszony, to znaki przy v_0 i a są zgodne (dodatnie); jeżeli ruch jest opóźniony, to ujemne. Musimy więc napisać osobne równania drogi dla każdego rodzaju ruchu. W przykładzie omawianym przed chwilą, będzie: w pierwszym etapie $s(t) = 20t - 5t^2$, w drugim etapie: $s'(t) = 5t^2$.

Wróćmy jeszcze do przypadku ruchu prostoliniowego bez zawracania. Niech nasz ruch będzie nawet niejednostajnie zmienny. Zgodnie z wcześniejszym możemy drogę obliczyć wprost z prędkości:

$$s = \Delta x = x(t_2) - x(t_1) = \left.\int v(t)\mathrm{d}t\right|_{t_2} - \left.\int v(t)\mathrm{d}t\right|_{t_1}$$

Możemy zauważyć, że powyższa różnica realizuje definicję całki oznaczonej w granicach od t_1 do t_2 (różnica wartości funkcji pierwotnej w górnej i dolnej granicy). Zatem możemy w zwartej formie zapisać wzór na drogę w ruchu prostoliniowym bez zawracania (ogólniej: będzie to wzór na przemieszczenie) pokonaną między chwilami t_1 i t_2 jako całkę oznaczoną:

$$s = \Delta x = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t$$

Droga w ruchu krzywoliniowym.

W ogólnym przypadku ruchu krzywoliniowego droga jest długością krzywej (np. paraboli). Odpowiedź na pytanie o nią nie jest łatwa. Rozważmy ruch na płaszczyźnie (x,y). Ustalimy wzór na drogę w ruchu krzywoliniowym na płaszczyźnie na 2 sposoby:

I. Motywacja fizyczna. Zgodnie z definicją prędkości, mała zmiana wektora położenia jest równa: $\mathrm{d}\vec{r} = \vec{v}(t)\mathrm{d}t$. Z kolei mała zmiana długości toru $\mathrm{d}s$ może być przybliżona odcinkiem o długości $|\mathrm{d}\vec{r}| = |\vec{v}(t)|\mathrm{d}t$. Całkowita długość toru w ruchu między chwilą t_1 a t_2 jest sumą tych małych przyczynków $\mathrm{d}s$, więc całką:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}(t)|\mathrm{d}t$$

$|\vec{v}(t)|$ jest wartością (długością) wektora prędkości w funkcji czasu.

II. Motywacja matematyczna. Mały fragment łuku o długości $\mathrm{d}s$ może być przybliżony odcinkiem, będącym z kolei długością wektora $\mathrm{d}\vec{s}$ o współrzędnych $(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$ na płaszczyźnie. Zgodnie z tw. Pitagorasa długość wektora $\mathrm{d}\vec{s}$ jest równa: $\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$. Teraz kilka przekształceń:

$$s = \int \mathrm{d}s = \int \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \int \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{(\mathrm{d}x)^2}{(\mathrm{d}t)^2} + \frac{(\mathrm{d}y)^2}{(\mathrm{d}t)^2}}\mathrm{d}t =$$

$$= \int \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}(t)|\mathrm{d}t$$

Całka ta niekoniecznie jest prosta. Nawet w przypadku prostego rzutu poziomego, gdy $\vec{v}(t) = (v_0, -gt) \Rightarrow |\vec{v}(t)| = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}$, całka nie jest prosta (całka z funkcji pierwiastkowej). Zwróćmy też uwagę, że zgodnie z interpretacją graficzną całki oznaczonej, drogę możemy policzyć jako pole pod wykresem funkcji $|\vec{v}(t)|$ (wartości prędkości od czasu). Korzystaliśmy z tego faktu w ostatnim zadaniu z Zestawu 1 i jeszcze skorzystamy.