## Praca siły (całka krzywoliniowa), siły zachowawcze

**42.**

Cząstka porusza się na płaszczyźnie $xy$ pod działaniem siły $\vec{F}(x,\,y) = 50\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2\frac{x\hat{i}+y\hat{j}}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, gdzie $x$ i $y$ wyrażone są w metrach. Oblicz pracę, którą wykona ta siła na odcinku pomiędzy punktami $(3\,\mathrm{m},\,4\,\mathrm{m})$ i $(8\,\mathrm{m},\,6\,\mathrm{m})$.

**43.**

Cząstka porusza się po krzywej $y(x) = 10\,\mathrm{m}\cdot\left[1+\cos\left(0{,}1\,\mathrm{m}^{-1}\cdot x\right)\right]$, od punktu $x = 0\,\mathrm{m}$ do $x = 10\pi\,\mathrm{m}$, pod wpływem stycznej siły o zmiennej wartości $F(x) = 10\,\mathrm{N}\cdot\sin\left(0{,}1\,\mathrm{m}^{-1}\cdot x\right)$. Jaką pracę wykonała siła?

W obu zadaniach mamy policzyć pracę zmiennej siły wykonaną przy przemieszczeniu ciała (w zad. 42. wzdłuż prostoliniowego toru – odcinka, w zad. 43 po krzywej). Korzystamy z najogólniejszej definicji pracy (całka krzywoliniowa):

$$W = \int \vec{F}(\vec{r})\circ d\vec{r}$$

W zad. 42. znamy wektor siły $\vec{F} = (F_x, F_y)$ , mamy więc całkę krzywoliniową z pola wektorowego, którym jest pole siły $\vec{F}$ (tzw. całkę skierowaną/zorientowaną):

$$W = \int \vec{F}(\vec{r})\circ d\vec{r} = \int (F_x dx + F_y dy)$$

Zasadniczo nie można podzielić tej całki na sumę dwóch (po $x$ i $y$) – $x$ i $y$ mogą być zależne, związane równaniem krzywej, po której całkujemy $y(x)$. W naszym przypadku torem jest odcinek między punktami (3,4) i (8,6). Możemy znaleźć równanie prostej: $y(x) = \alpha x + b$, które w oczywisty sposób wiąże zmienne $x$ i $y$. W takim razie $dy = \alpha dx$. Możemy więc zapisać:

$$\int_3^8 (F_x + \alpha F_y) dx$$

Przy czym w funkcji podcałkowej za $y$ wstawiamy $\alpha x + b$.
Zawsze można też sparametryzować równanie krzywej i użyć wzoru na całkę w postaci parametrycznej. Dostaniemy tę samą całkę do rozwiązania.
W zad. 43. znamy tylko wartość siły w różnych punktach (o różnej współrzędnej $x$), jest to więc całka z pola skalarnego (tzw. całka nieskierowana/niezorientowana), którą liczymy inaczej:

$$\int F(x,y)\mathrm{d}s = \int_a^b F(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\mathrm{d}x$$

Podstawienie za d$s$ być może Państwo poznają jako element długości krzywej o równaniu $y(x)$. W naszym przypadku całka nie będzie może nie najłatwiejsza, ale da się ją obliczyć. Wynik 257 J w odpowiedziach jest poprawny.

**PRZYKŁAD 8.5**

**Zachowawcza czy niezachowawcza?**

Która z następujących sił działających w dwóch wymiarach jest zachowawcza, a która nie? Załóż, że $a$ i $b$ to stałe o odpowiednich jednostkach:

a. $axy^3\cdot\hat{i} + ayx^3\cdot\hat{j}$,
b. $a[(y^2/x)\cdot\hat{i} + 2y\ln(x/b)\cdot\hat{j}]$,
c. $\frac{ax\cdot\hat{i}+ay\cdot\hat{j}}{x^2+y^2}$

**SPRAWDŹ, CZY ROZUMIESZ 8.5**

Dwuwymiarowa siła zachowawcza przyjmuje wartość zero na osi $x$ i $y$ oraz spełnia warunek $\mathrm{d}F_x/\mathrm{d}y = \mathrm{d}F_y/\mathrm{d}x = (4\,\mathrm{N}/\mathrm{m}^3)xy$. Jaka jest wartość siły w punkcie $x = y = 1\,\mathrm{m}$?

W tych zadaniach poznajemy warunki, jakie musi spełniać siła zachowawcza. Tylko dla takiej siły możemy zdefiniować energię potencjalną i tylko w obecności takich sił zachowana jest energia mechaniczna (matematyk powie, że tylko niektóre pola wektorowe są potencjalne). Fizyczna (najbardziej podstawowa) definicja siły zachowawczej mówi, że praca takiej siły nie zależy od toru (nieważne po jakim torze ciało zostało przemieszczone między punktami A i B, praca siły zachowawczej jest taka sama). Równoważnie możemy powiedzieć, że praca siły zachowawczej po torze zamkniętym jest 0: $W = \oint \vec{F}(\vec{r})^\circ \mathrm{d}\vec{r} = 0$ (symbol całki krzywoliniowej po zamkniętym torze zyskuje kółko). Matematycznie (na podstawie tw. Stokesa, o którym niebawem będziecie się Państwo uczyć na Analizie) można warunek zerowania się całki po zamkniętym torze zastąpić warunkiem znikania rotacji z siły (rotacja pola wektorowego jest operatorem matematycznym zdefiniowanym jako iloczyn wektorowy operatora wektorowego nabla: $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ i wektora pola): $\mathrm{rot}\,\vec{F}(\vec{r}) = 0$. Dla siły 2D (zależnej od $x$ i $y$) znikanie rotacji oznacza warunek (8.10) w skrypcie (Podrozdział 8.2), z którego trzeba tutaj skorzystać.

W rozwiązaniu Sprawdź, czy rozumiesz 8.5 trzeba pójść „w drugą stronę”. Żeby znaleźć siłę, trzeba scałkować:

$$F_x = \int 4xy\,\mathrm{d}y\,, \qquad F_y = \int 4xy\,\mathrm{d}x$$

Po scałkowaniu uwzględniamy stałą całkowania, która może przecież zależeć od drugiej zmiennej (przy całkowaniu po $dy$, stała jest funkcją $x$ i odwrotnie). Te stałe trzeba znaleźć z warunków, które podano w treści zadania: $\vec{F}(0,y) = \vec{F}(x,0) = 0$, obie stałe więc znikają. Ostatecznie wektor siły: $\vec{F}(x,y) = (2xy^2, 2x^2y)$

Zad. 27 i 73 (obliczanie siły na podstawie energii potencjalnej i odwrotnie)

Zadania o bardzo dużym fizycznym znaczeniu. Dla sił zachowawczych możemy zdefiniować energię potencjalną. Jak? Energia potencjalna jest równa pracy, jaką siła zewnętrzena musi wykonać, aby ciało przenieść z pewnego punktu referencyjnego (w którym przyjmujemy określony poziom odniesienia dla energii, najcześciej 0, bardzo często w nieskończoności) do danego punktu w przestrzeni, w którym energię potencjalną chcemy określić, przeciwdziałając sile pochodzącej od pola. To jest definicja energii potencjalnej. Czyli:

$$E_p = -\int_{\mathrm{ref}}^{r} \vec{F}(\vec{r})^\circ \mathrm{d}\vec{r}$$

Znak „$-$” wyraża, że mamy liczyć pracę siły zewnętrznej (przeciwko polu, $\vec{F_z} = -\vec{F}(\vec{r})$). Proszę zwrócić uwagę, że energię potencjalną możemy zdefiniować tylko z dokładnością do pewnej stałej (wartość w punkcie referencyjnym). Większy fizyczny sens ma miana energii potencjalnej (punkt odniesienia się odejmuje).

Możemy znaleźć relację odwrotną (operatorem odwrotnym do całki krzywoliniowej jest operator gradientu – wektorowy operator nabla działający na funkcję skalarną):

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\mathrm{grad}\,E_p$$

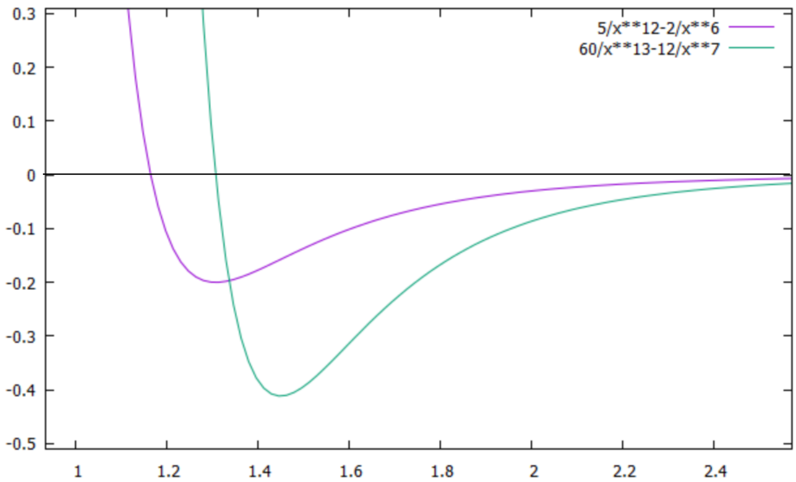
Wszystko wiemy. W naszych zadaniach mamy tzw. pola centralne – siła zależy jedynie od odległości $x, r$ od centrum (źródła) pola. Jest to więc de facto przypadek 1D.

$$E_p(x) = -\frac{a}{x^{12}} + \frac{b}{x^6} \quad \rightarrow \quad F(x) = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = -\frac{12a}{x^{13}} + \frac{6b}{x^7} \tag{1}$$

$$F(r) = br^3 \quad \rightarrow \quad E_p(r) = -\int_P^D F(r)\mathrm{d}r = -\frac{b}{4}r^4 \quad (E(P) = 0)$$

Warunek równowagi to oczywiście warunek zerowania się siły (a więc zerowania 1. pochodnej energii potencjalnej – wniosek: ciało pozostaje w równowadze w punkcie, w którym energia potencjalna ma ekstremum; równowaga będzie trwała w minimum, nietrwała – w maksimum $E_p(x)$).

Energia potencjalna dana wzorem (1) ma duże znaczenie w chemii molekularnej – bardzo często używana jest do modelowania energii wiązania molekuły skladającej się z dwóch atomów. Każdy atom wytwarza wokół siebie pole o takiej energii, druga z cząsteczek znajduje się w odległości, dla której energia ma minimum (to jest wtedy długość wiązania). Taką postać energii nazywa się energią typu Lennarda-Jonesa (albo energią 12-6, wyrażając tym jakie wykładniki przy $x$ model zakłada). Na wspólnym wykresie przedstawiam $E_p(x)$ oraz $F(x)$ (dla przykładowych parametrów $a$ i $b$):




Widać wyraźnie, że w miejscu, gdzie $E_p(x)$ ma minimum (fioletowa krzywa), $F(x)$ przechodzi przez 0 (zielona krzywa). Dla położeń „na lewo" od minimum $E_p(x)$ siła jest dodatnia (ma charakter odpychający, od źródła oddziaływania w $x = 0$ do położenia równowagi), „na prawo" od minimum $E_p(x)$ siła jest z kolei ujemna (oznacza przyciąganie do punktu równowagi). Z takich wykresów można wiele powiedzieć o oddziaływaniu ciał.

Skoro wiemy już tak dużo, to jeszcze pokażmy, że energia potencjalna grawitacji (w pobliżu powierzchni Ziemi) rzeczywiście wynosi $mgh$:

$$E_p = -\int_0^h -mg\,dy = mgh$$