ZESTAW 1

Mechanika FiIS-FT-1 S1

Kontakt: Radosław Strzałka, pok. 315/D10, mail: `strzalka@fis.agh.edu.pl`
Zestawy dostępne pod adresem: `http://galaxy.agh.edu.pl/~strzalka/#dydaktyka#m_ft`
Tematyka: wprowadzenie matematyczne: układy równań, wektory, pochodne, całki.

Proszę się zapoznać z **materiałami wprowadzającymi** do tematyki na bardzo podstawowym poziomie: **link** oraz **link**

1. Rozwiąż układy równań dwóch lub trzech zmiennych. *Uwaga. W przykładach c) i g) niewiadomymi są r, φ, ϑ, natomiast x, y są znane.*

   a) $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x^2 - 16 \\ 3y - 2x = 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ d) $\begin{cases} 6y = 2x^2 - 18 \\ y - 2 = x + 1 \end{cases}$

   e) $\begin{cases} x^2 + 9 = 2y \\ 3x = 8 - y \end{cases}$ f) $\begin{cases} 4x^2 - 4x = y - 1 \\ 2x - 1 = -3y \end{cases}$ g) $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\vartheta \\ y = r\sin\varphi\sin\vartheta \\ z = r\cos\vartheta \end{cases}$ h) $\begin{cases} 7a = 3 - 4b \\ 2a = 4b - 5c + 1 \\ a = 2 + 5c \end{cases}$

2. Mamy trzy wektory $\vec{a}$ = [0, -3, 1], $\vec{b}$ = [1, 2, -1], $\vec{c}$ = [-2, 2, 6]. Sprawdź, czy są wśród nich pary wektorów prostopadłych. Znajdź iloczyn wektorowy $\vec{a} \times \vec{b}$. Oblicz iloczyn mieszany $\vec{c} \circ (\vec{a} \times \vec{b})$.

3. Proszę wykazać, że objętość graniastosłupa zbudowanego przez trzy wektory jest dana przez ich iloczyn mieszany.

4. Znajdź pary wektorów prostopadłych spośród trójki: $\vec{a} = [1, 0, -3]$, $\vec{b} = [4, -2, 2]$, $\vec{c} = [3, 2, 1]$. Jakie są kąty pomiędzy wszystkimi parami wektorów? Ile wynosi objętość graniastosłupa zbudowanego przez te wektory.

5. [HRW Z.34/3] W równaniu $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ przyjmij $q = 2$, $\vec{v} = 2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 6\hat{k}$ i $\vec{F} = 4\hat{\imath} - 20\hat{\jmath} + m\hat{k}$ (w umownych jednostkach). (i) Ile wynosi stała m? (ii) Ile wynosi wektor $\vec{B}$, wyrażony przez wektory jednostkowe, jeśli $B_x = B_y$?

6. [HRW Z.23/3] Udowodnij, że jeśli suma dwóch wektorów jest prostopadła do ich różnicy, to muszą one mieć jednakową długość.

7. [Wolny 1.1.2.] Udowodnij, że jeśli długość sumy wektorów jest równa długości ich różnicy, to wektory te muszą być prostopadłe.

8. [HRW Z.25/3] Dwa wektory, których długości wynoszą a i b, tworzą ze sobą kąt θ, gdy ich początki znajdują się w jednym punkcie. Wyznaczając ich składowe w prostokątnym układzie współrzędnych udowodnij, że suma $\vec{r}$ tych wektorów ma długość:
$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + 2\,\vec{a} \circ \vec{b}}$$

9. Użyj danych z zadania 2, aby znaleźć długość r wektora $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$ (do obliczeń wykorzystaj kalkulator, nie zapisując żadnych danych na kartce/tablicy). Następnie, JEDNYM rachunkiem na kalkulatorze potwierdź ten wynik, korzystając ze wzoru z zadania 8.

10. Korzystając z definicji pochodnej oblicz pochodną funkcji:

    a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = \sin x$ c) $f(x) = 1/x^2$ d) $g(x) = \cos x$

11. Korzystając ze wzorów na pochodne funkcji podstawowych (patrz materiały dostępne pod linkiem), oblicz pochodne następujących funkcji:

    a) $3 + x^5$ b) $\frac{1}{2}\sin x$ c) $\frac{2}{x^2}$ d) $(5 - x^3)^2$
    e) $3\,\cos(x^2 - 1)$ f) $x^2 \mathrm{e}^{-2x^2}$ g) $\ln\frac{1}{1-x^2}$ h) $\sqrt{x^2 + 5x - 6}$

    Uwaga. e^x to funkcja eksponencjalna, czyli funkcja wykładnicza o podstawie e (niewymierna liczba e $\approx 2,72$ jest podstawą logarytmu naturalnego).

12. Proszę znaleźć równanie prostej stycznej do krzywej będącej wykresem funkcji $f(x) = 3 + 2x^2 + x^3$ w dwóch przypadkach: w punkcie $x_0 = 1$ oraz punkcie $x_0 = 0$.
    Uwaga. Do znalezienia wyrazu wolnego 'b' w równaniu prostej trzeba wykorzystać fakt, że punkt $(x_0, f(x_0))$ należy zarówno do krzywej, jak i stycznej.

13. Pochodna często służy nam do znajdowania tzw. ekstremum lokalnego funkcji (maksimum lub minimum funkcji w pewnym zakresie dziedziny). Warunkiem koniecznym występowania ekstremum lokalnego jest zerowanie się pierwszej pochodnej funkcji. Z tego warunku znajdujemy wszystkie argumenty x_0, dla których funkcja może mieć ekstremum (punkt x_0 nazywa się w matematyce „punktem podejrzanym o ekstremum"):

    $$\text{Funkcja ma ekstremum lokalne w } x_0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \ldots$$

    a) Znajdź ekstrema następujących funkcji: $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$, $g(x) = \mathrm{e}^{-(x-a)^2}$ (a-parametr)
    b) Moc wydzielona na oporniku R podłączonym do źródła napięcia o sile elektromotorycznej ε i oporze wewnętrznym r wynosi: $P = \frac{\varepsilon^2 R}{(r+R)^2}$. Traktując moc jako funkcję oporu $P(R)$, oblicz, dla jakiej wielkości oporu R moc jest maksymalna. Ile ona wynosi?

14. Wierzchołek paraboli jest jej ekstremum (globalnym). Wiedząc to, oblicz współrzędne $W(p, q)$ wierzchołka paraboli o ogólnym równaniu $y(x) = ax^2 + bx + c$.

15. Całka (wynik całkowania) jest funkcją pierwotną do funkcji danej (całkowanej). Oznacza to, że pochodna funkcji, będącej wynikiem całkowania, ma być funkcją pierwotną:

    $$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C \;\; (C\text{-stała}) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = (F(x))'$$

    Korzystając z tej definicji „zgadnij" wynik całkowania następujących funkcji:

    a) $2x$ b) $\sin x$, $\sin(\omega t)$ (ω-stała, t-zmienna) c) $4x^3 - x$ d) $x\mathrm{e}^{-x^2}$ e*) $\mathrm{tg}x$

16. Tak jak pochodna ma interpretację geometryczną, tak i całka (oznaczona). Pozwala ona obliczyć pole powierzchni pod krzywą zdefiniowaną funkcją podcałkową $f(x)$. Całkę oznaczoną w granicach (a, b) obliczamy następująco:

    $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

    W ten sposób możemy np. obliczać drogę przebytą przez ciało jako pole powierzchni pod zależnością $v(t)$ albo pracę jako pole powierzchni pod zależnością $F(x)$.

    a) Proszę obliczyć pole powierzchni ograniczonej parabolą $y = x^2$ i osią x w przedziale $x \in \langle 0, 1\rangle$.
    b) Znaleźć drogę, jaką przebędzie ciało poruszające się z prędkością o równaniu $v(t) = v_0 + at$ między chwilą $t_1 = 2$ s a chwilą $t_2 = 5$ s ($v_0 = 1$ m/s, $a = 2$ m/s^2).
    c) Prędkość ciała poruszającego się pod wpływem siły oporu proporcjonalnej do prędkości zależy od czasu jak $v(t) = v_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$, ($v_0$, τ - stałe). Proszę znaleźć całkowitą drogę, jaką przebędzie ciało w całym ruchu (czas biegnie od zera do nieskończoności).