

ZESTAW 10

MECHANIKA FHS-FT-1 S1

Kontakt: Radosław Strzałka, pok. 315/D10, mail: strzalka@fis.agh.edu.pl

Zestawy dostępne pod adresem: http://galaxy.agh.edu.pl/~strzalka/#dydaktyka#m_ft

Tematyka: ruch w polu sił centralnych, grawitacja.

1. [por. Irodow 1.98.] Stosunek obiegu Jowisza i Ziemi wokół Słońca wynosi 12. Zakładając, że orbity planet są okręgami, obliczyć stosunek odległości Jowisza i Ziemi od Słońca.
2. Szkolny wzór na siłę grawitacji $F = mg$ ($g = \text{const.}$) jest przybliżeniem wzoru Newtona dla małych odległości ciał od powierzchni Ziemi. Jak ziemskie przyspieszenie grawitacyjne g zależy od R_Z, M i G ? Na jakiej wysokości nad powierzchnią Ziemi g maleje do 99% wartości na powierzchni?
3. Wyprowadź wzór na energię potencjalną grawitacji. Wykaż, że prosty wzór $E_p = mgh$ jest przybliżeniem ogólnego wzoru w pobliżu powierzchni masy źródłowej (wykorzystaj rozwinięcie funkcji w szereg Taylora). Znajdź wzór na całkowitą energię masy m poruszającej się w polu grawitacyjnym wytwarzanym przez spoczywającą masę M . Jak wyrażenie to zmienia się w przypadku orbity eliptycznej o pólosci wielkiej równej a ? Udowodnij tzw. twierdzenie o wirale dla pola grawitacyjnego, tzn. wykaż, że $2E_k = -E_p$.
- △ 4. Wyprowadź ogólny wzór na prędkość satelity poruszającego się po orbicie kołowej na wysokości h nad powierzchnią Ziemi. Pokaż, że w granicy $h = 0$ wzór ogólny przechodzi w postać dla I prędkości kosmicznej. Ile wynosi okres obiegu satelity wokół Ziemi?
- △ 5. Znajdź promień satelity geostacjonarnej (wyraź za pomocą G, M, T dla Ziemi).
6. Wyprowadź wzór na II prędkość kosmiczną. Z jakiego miejsca na powierzchni Ziemi najlepiej wystrzeliwać rakiety? Uzasadnij. Znajdź wzór na prędkość Ziemi na orbicie okołosłonecznej oraz wzór na III prędkość kosmiczną.
7. Satelita krąży po orbicie kołowej o promieniu R . W punkcie A zostaje nadana mu prędkość v_0 styczna do jego orbity. Stosując prawa zachowania, policzyć odległość satelity od środka Ziemi R_1 oraz jego prędkość v_1 w przeciwległym punkcie jego nowej orbity (punkt B). Jaka jest minimalna prędkość v_0 , która gwarantuje, że satelita nie zahaczy o powierzchnię Ziemi po przeciwnej stronie? (*Uwaga.* v_0 może być mniejsza niż prędkość orbitalna satelity na orbicie o promieniu R .) Jak trzeba zmienić prędkość v_1 w punkcie B, aby satelita poruszał się dalej po orbicie kołowej o promieniu R_1 ?
8. [por. HRW Z.37/R.14] Dwa punkty materialne o masach m i M znajdują się początkowo w spoczynku w nieskończonej odległości od siebie. Pokazać, że w dowolnej chwili czasu, gdy znajdują się w odległości d od siebie, względna prędkość ich zbliżania, wywołana przyciąganiem grawitacyjnym, wynosi $\sqrt{2G(M+m)/d}$.
9. Korzystając z zasady superpozycji znajdź wypadkowe natężenie pola i potencjał w narożniku trójkąta równobocznego o boku a , jeśli w pozostałych dwóch narożnikach znajdują się masy m . Jaką pracę należy wykonać, aby umieścić w tym narożniku dodatkową masę m ?
10. [por. Irodow 1.109.] Punkt materialny o masie m znajduje się w odległości r od środka jednorodnej kuli o masie M i promieniu R . Znaleźć zależność potencjału (energii potencjalnej) i natężenia pola (siły) od odległości r , gdy r zmienia się od zera do nieskończoności.
- 11. [Irodow 1.101.] Znajdź siłę oddziaływania układu składającego się z punktu materialnego o masie m i cienkiego, jednorodnego pręta o masie M i długości l . Pręt i punkt materialny znajdują się na jednej prostej w odległości a od siebie. Ile wynosi energia potencjalna oddziaływania? Jak zmienia się wynik, gdy pręt będzie nieskończenie długi w jedną stronę (pręt półnieskończony; znamy wtedy gęstość liniową masy pręta λ)?
- 12. Cienki pręt o masie m i długości l wygięto w łuk o kącie rozwarcia θ . Wykorzystując całkową zasadę superpozycji, oblicz natężenie i potencjał pola grawitacyjnego w środku łuku. Następnie rozważ przypadki szczególne: półokrąg ($\theta = 180^\circ$) oraz pełny okrąg ($\theta = 360^\circ$). *Wskazówka.* Najwygodniej będzie w tym przypadku całkować po kącie.

- 13.* Z wykładu wiemy, że tor ruchu masy m w centralnym polu grawitacyjnym wytwarzanym przez masę M może być opisany w układzie biegunowym za pomocą równania:

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2mr^4 E}{L^2} + \frac{2GMm^2 r^3}{L^2} - r^2,$$

gdzie L jest momentem pędu masy m w jej ruchu orbitalnym, a E jej energią całkowitą.

- (a) Pokaż, że równanie to jest spełnione przez rodzinę krzywych stożkowych o ogólnym równaniu:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi},$$

gdzie e - mimośród orbity (stosunek odległości między ogniskami do odległości między punktami przecięcia krzywej z osią x), p - parametr ogniskowy (odległość jednego z ognisk do punktu na krzywej wzdłuż prostej równoległej do kierownicy). (Wykładowca podaje równoważną definicję stożkowych: $\frac{ed}{r} = 1 + e \cos \varphi$, gdzie d jest odległością jednego z ognisk do jego kierownicy, $p = ed$).

- (b) Pokaż, że energia całkowita wynosi wówczas:

$$E = -\frac{G^2 M^2 m^4}{2L^2}(1 - e^2)$$

- (c) Przedyskutuj zależność energii od mimośrodu dla różnych krzywych stożkowych.

14. [Irodow 1.185.] Wyobraźmy sobie szyb wydrążony w Ziemi wzdłuż jej osi obrotu, do którego bez prędkości początkowej wpada ciało. Zakładając, że Ziemia jest jednorodną kulą i zaniedbując opory ruchu:

- (a) wykazać, że ruch ciała jest harmoniczny,
- (b) wyznaczyć czas, w ciągu którego ciało osiągnie przeciwną stronę Ziemi,
- (c) obliczyć prędkość ciała w środku Ziemi.

- 15.* [por. Wolny 3.19.1] Odosobniona gwiazda, będąca jednorodną kulą o stałej masie, w wyniku zapadania grawitacyjnego kurczy się zmniejszając n -krotnie okres obrotu wokół własnej osi.

- (a) Jakiej zmianie uległo przyspieszenie grawitacyjne na jej biegunach?
- (b) Jeżeli tą gwiazdą będzie Słońce (promień, masa i okres obrotu wokół własnej osi do znalezienia w internecie), to przy jakim n zacznie się ono rozpadać. Jaki wówczas będzie promień Słońca R_x tuż przed rozpadem?