ZESTAW 2

MECHANIKA FIIS-FT-1 S1

Kontakt: Radosław Strzałka, pok. 315/D10, mail: `strzalka@fis.agh.edu.pl`
Zestawy dostępne pod adresem: `http://galaxy.agh.edu.pl/~strzalka/#dydaktyka#m_ft`
Tematyka: wprowadzenie fizyczne; równania położenia, prędkości; ruch względny.

1. Jaka jest jednostka stałej G w prawie Newtona ($F_{gr} = G\frac{Mm}{r^2}$)? W oparciu o analizę wymiarową proszę sprawdzić, czy wzór $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$ jest poprawny? m - masa, g - przyśpieszenie grawitacyjne, d - odległość, I - moment bezwładności (o wymiarze iloczynu masy i kwadratu długości).

2. [Orear P.2/R.1] Znajdź postać zależności siły oporu F powietrza od powierzchni pola przekroju S, gęstości ρ powietrza i prędkości v samochodu wykorzystując analizę wymiarową.

3. Oszacuj wartość wyrażenia: $x = \dfrac{v_0^2 + \sqrt{v_0^4 - g(2hv_0^2 + gd^2)}}{gd}$ dla $v_0 = 20$ m/s, $g \approx 10$ m/s^2, $d = 30$ m, $h = 5$ m (nie używając kalkulatora). Następnie potwierdź wynik na kalkulatorze. Sprawdź jednostkę. *Odp.* $x \approx 2$, dokładnie: $x = 1{,}91$.

4. Z użyciem kalkulatora oblicz wartość: $f = \dfrac{me^4}{4\varepsilon_0^2 h^3 n^3}$, gdzie: m - masa elektronu, e - ładunek elementarny, ε_0 - przenikalność elektryczna próżni, h - stała Plancka, $n = 2$. Sprawdź jednostkę. (Odpowiednie wartości i jednostki znajdziesz w tablicach lub internecie). *Odp.* $f = 8{,}2 \cdot 10^{14}$ Hz.

5. [ODI 2022-23 mat-II.3] Dwa miasta A i B są odległe od siebie o 960 km. Z tych miast wyjechały naprzeciw siebie dwa pociągi, przy czym pociąg z miasta B wyjechał 2 godziny później i jechał z prędkością o 20 km/godz. większą niż pociąg z miasta A. Pociągi te minęły się dokładnie w połowie drogi. Podaj prędkość pociągu, który wyruszył z miasta A.

6. [Orear Ćw.13/R.1] Położenie ciała dane jest funkcją $y(t) = \exp(-t/\tau)$. Przy jakiej wartości t wartość y maleje do połowy (wyraź odpowiedź przez τ)? Do jakiej wartości wartość y zmaleje po czasie $t = \tau$?

7. Współrzędna cząstki poruszającej się wzdłuż osi x zależy od czasu t zgodnie ze wzorem (x jest wyrażone w metrach, a t w sekundach):
$$x(t) = -32 + 24\,t^2\,\mathrm{e}^{-0{,}3t}$$
   (a) Podaj wyrażenia na prędkość i przyśpieszenie (chwilowe) jako funkcje czasu.
   (b) Znajdź chwilę, kiedy prędkość cząstki jest równa zeru, a następnie współrzędną cząstki w tej chwili.
   (c) Naszkicuj wykres zależności $x(t)$ dla $t \in (0,\infty)$.

8. [HRW Z.19/R.2] Proton porusza się wzdłuż osi x zgodnie z równaniem $x(t) = 50t + 10t^2$. Oblicz: a) prędkość średnią protonu w czasie pierwszych 3 s jego ruchu, b) prędkość chwilową dla $t = 3$ s, c) przyśpieszenie chwilowe dla $t = 3$ s, d) szybkość średnią po 3 s.

9. [podobne do HRW Z.19/R.2] Proton porusza się wzdłuż osi x zgodnie z równaniem $x(t) = 50t - 10t^2$. Oblicz: a) prędkość średnią protonu w czasie pierwszych 2 i 3 s jego ruchu, b) prędkość chwilową dla $t = 2$ s i $t = 3$ s, c) przyśpieszenie chwilowe dla $t = 3$ s, d) szybkość średnią po 3 s.

10. Ciało porusza się po prostej z przyśpieszeniem zależnym od czasu jak $a(t) = At$, gdzie $A = 2$ (w jakich jednostkach?). Wyprowadź równanie ruchu tego ciała, jeśli wiemy, że w 10. sekundzie ruchu ciało przecinało początek osi x z prędkością o wartości 5 m/s w kierunku dodatnim osi.

11. Napisz równania ruchu ciała $\{x(t),v(t)\}$ w ruchu jednostajnie zmiennym wzdłuż osi x. Przyjmij warunki: $v(t=0)=v_0$, $a=const$. Na ich podstawie wyraź prędkość końcową jako funkcję drogi. Następnie znajdź drogę do zatrzymania ciała w ruchu opóźnionym z prędkością początkową v_0 i opóźnieniem a.

12.* Korzystając z własności pochodnej, proszę udowodnić, że wektor prędkości jest zawsze styczny do toru.

13. Punkt materialny porusza się tak, że jego wektor wodzący dany jest jedną z poniższych zależności od czasu. Dla każdego przypadku proszę znaleźć wektor prędkości $\vec{v}(t)$, zależność wartości prędkości od czasu $v(t)$ oraz wektor przyśpieszenia $\vec{a}(t)$. Określ rodzaj ruchu jakim porusza się punkt w danym przypadku.
    (a) $\vec{r}(t) = \left[v_0 t + bt^2,\ 2v_0 t + 2bt^2,\ 0\right]$ (v_0,b - stałe)
    (b) $\vec{r}(t) = \left[3v_0 t,\ v_0 t,\ H - \frac{1}{2}gt^2\right]$ (v_0,H,g - stałe)
    (c) $\vec{r}(t) = [A\cos(\omega t),\ A\sin(\omega t),\ v_0 t]$ (A,ω - stałe)

14. Równania położenia ciała mają postać: $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \frac{1}{2}\sin(2t)$. Znajdź równanie toru.

15. Równania ruchu dwóch punktów obserwowanych z danego układu współrzędnych wyglądają następująco:

$$\vec{r}_1(t) = (1{,}2{,}0)t; \qquad \vec{r}_2(t) = (4{,}0{,}4) + (1{,}0{,}0)t + (-2{,}0{,}0)t^2.$$

Znajdź wektor prędkości i przyśpieszenia względnego tych punktów. Następnie znajdź zależność ich odległości od czasu. Dla jakiej chwili t_{min} odległość między ciałami będzie najmniejsza?

16. Samochód, jadąc z prędkością o wartości $v_s = 72$ km/h, wyprzedza pociąg o długości $L = 200$ m i prędkości $v_p = 36$ km/h. Ile czasu zajmie mu wyprzedzanie? Jaką przejedzie przez ten czas drogę?

17. O ile wcześniej musiałby wystartować Janek, aby wygrać bieg na dystansie 100 m z Frankiem? Prędkość maksymalna Janka to 20 km/h, a Franka - 30 km/h. Obaj chłopcy potrafią wystartować z przyśpieszeniem 1 m/s^2, które utrzymują do osiągnięcia swoich maksymalnych prędkości.

Równania ruchu metodą całkowania; równanie położenia *vs.* droga; całka nieoznaczona *vs.* oznaczona

Aby na podstawie znajomości zależności przyśpieszenia od czasu, ustalić równanie położenia ciała, musimy użyć całkowania. Procedura ta jest dobrze opisana (dla przypadku 1D) w podręczniku openstax.pl: LINK. W przypadku 3D procedura wygląda dokładnie tak samo, ale powtarzamy ją dla każdej składowej. Niech wektor przyśpieszenia jest następujący: $\vec{a}(t) = [a_x(t), a_y(t), a_z(t)]$. Aby znaleźć współrzędne wektora prędkości $\vec{v}(t)$ oraz położenia $\vec{r}(t)$ w funkcji czasu, obliczamy następujące całki:

$$v_x(t) = \int a_x(t)\mathrm{d}t \quad v_y(t) = \int a_y(t)\mathrm{d}t \quad v_z(t) = \int a_z(t)\mathrm{d}t$$

$$x(t) = \int v_x(t)\mathrm{d}t \quad y(t) = \int v_y(t)\mathrm{d}t \quad z(t) = \int v_z(t)\mathrm{d}t$$

Powyższe całki są całkami nieoznaczonymi, dlatego musimy pamiętać o dopisaniu stałych całkowania, np. dla $a_x(t) = 5t$:

$$v_x(t) = \int a_x(t)\mathrm{d}t = \int 5t\,\mathrm{d}t = \frac{5}{2}t^2 + C_1$$

Stałą C_1 możemy ustalić tylko, jeśli wiemy coś więcej o prędkości w jakiejś chwili. Przykładowo, jeśli dla $t = 2$ s składowa x prędkości ma wartość $v_x = 5$ m/s (ktoś nam to powiedział), to stałą całkowania obliczymy następująco:

$$\begin{cases} v_x(t=2) = 5 \\ v_x(t=2) = \frac{5}{2}\cdot 4 + C_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C_1 = -5 \text{ m/s}$$

Zatem zależność składowej x prędkości od czasu jest ostatecznie: $v_x(t) = \frac{5}{2}t^2 - 5$. Jeżeli znamy prędkość początkową w chwili $t = 0$, czyli $v_x(t = 0) = v_{0x}$, to mówimy wówczas o *warunkach początkowych.*
Analogicznie postępujemy, aby obliczyć składową x położenia:

$$x(t) = \int v_x(t)\mathrm{d}t = \int \left(\frac{5}{2}t^2 - 5\right)\mathrm{d}t = \frac{5}{6}t^3 - 5t + C_2$$

Kolejną stałą całkowania C_2 znajdziemy znowu z warunku, np. początkowego $x(0) = 3 \Rightarrow C_2 = 3$ m, zatem ostatecznie $x(t) = \frac{5}{6}t^3 - 5t + 3$.

Uwaga 1. „Całka z wektora”? Dla przypadku 3D nie możemy zapisać w zwięzłej postaci:

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)\mathrm{d}t$$

(wektor prędkości jako całka z wektora przyśpieszenia). Matematyka nie zna takiego zapisu. Istnieją w matematyce całki z funkcji wektorowych, ale są one bardziej skomplikowane (poznacie je Państwo na 2. i 3. semestrze Analizy). Wynikiem całki, nawet w tych bardziej skomplikowanych przypadkach, nigdy nie jest wektor.
Zatem: aby znaleźć równania ruchu (współrzędne wektora położenia w czasie) metodą całkowania, stosujemy ją dla składowych. Prawdą jest:

$$\vec{v}(t) = [v_x(t), v_y(t), v_y(t)] = \left[\int a_x(t)\mathrm{d}t,\ \int a_y(t)\mathrm{d}t,\ \int a_z(t)\mathrm{d}t\right]$$

Uwaga 2. Przypadek szczególny $\vec{a} = const.$
Ruch ze stałym (w czasie) przyśpieszeniem nazywamy ruchem *jednostajnie zmiennym* (przyśpieszonym lub opóźnionym). Choć jest to bardzo szczególny przypadek, to mamy z nim często do czynienia. Dlatego ogólne równanie ruchu, wynikające z rozwiązania metodą przez całkowanie, warto pamiętać. Zakładamy, że w ruchu ze stałym przyśpieszeniem $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = const(t)$ warunki początkowe (dla $t = 0$) wynoszą: prędkość początkowa $\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$ oraz położenie początkowe $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$. W takim razie, w wyniku całkowania stałego wektora przyśpieszenia otrzymujemy:

$$a_x = const(t) \quad \Rightarrow \quad v_x(t) = \int a_x\mathrm{d}t = a_x t + v_{0x} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \int v_x(t)\mathrm{d}t = \int (a_x t + v_{0x})\mathrm{d}t = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{0x}t + x_0$$

Podobnie dla pozostałych zmiennych. Podsumowując, wektor położenia w funkcji czasu w ruchu ze stałym wektorem przyśpieszenia jest następujący:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

Znaki w powyższym ogólnym równaniu ruchu zależą od zwrotu wektorów (znaku składowych) względem osi układu współrzędnych. Np. równanie $x(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ może opisywać ruch ciała poruszającego się w dodatnim kierunku osi x z prędkością początkową i przyśpieszeniem (np. jadąc samochodem ze stałą prędkością nagle zaczynamy przyśpieszać), natomiast równanie $y(t) = h - v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ może opisywać ruch ciała rzuconego pionowo w dół z wysokości h nad ziemią w polu grawitacyjnym.

Droga w ruchu prostoliniowym.

Droga jest długością toru (trajektorii), po jakim porusza się ciało. W przypadku ruchu 1D torem tym jest prosta, więc droga jest długością odcinka. Rozważmy ruch ciała po prostej wzdłuż osi x wg równania $x(t)$. Droga, jaką ciało przebędzie między chwilą t_1, a t_2 wynosi:

$$s = \Delta x = x(t_2) - x(t_1)$$

Zatem w tym przypadku droga jest równa przemieszczeniu ciała. **Ważne!** Powyższy wzór jest słuszny dla przypadku ruchu prostoliniowego **bez zawracania**. Możemy sobie łatwo wyobrazić przypadek, kiedy nasze ciało porusza się początkowo w prawo osi x, hamuje, w pewnym momencie się zatrzymuje, zawraca i porusza w kierunku początku osi. Gdy dotrze z powrotem do położenia $x = 0$, jego przemieszczenie jest 0, ale przecież w międzyczasie pokonało ileś metrów. Przypadek taki obrazuje np. ruch o równaniu $x(t) = 20t - 5t^2$. Ciało osiąga największą odległość po dodatniej stronie osi x dla chwili $t_1 = 2$ s ($x_{max} = x(t_1) = 20$ m, oczywiście warunek na t_1 jest następujący: $\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t_1} = v(t_1) = 0$). Po czasie $t_2 = 2t_1 = 4$ s dociera z powrotem do miejsca startu. Żeby znaleźć drogę na podstawie równania położenia musimy podzielić ruch na etapy: do osiągnięcia $x_{max} = 20$ m, oraz ruch od momentu zawrócenia. W tym drugim etapie równanie ruchu jest następujące: $x'(t) = 5t^2$ (ciało nadal ma przyśpieszenie, tym razem liczymy położenie od punktu x_{max} w kierunku ruchu ciała, a więc do miejsca $x = 0$; czyli $x' = 0$ w punkcie $x = x_{max}$; podobnie czas zaczynamy liczyć od t_1). Droga pokonana przez ciało np. po $t_3 = 1{,}5t_1 = 3$ s wynosi wówczas $s = x(t_1) + x'(t_3 - t_1) = x_{max} + x'(0{,}5t_1) = 25 + 5 \cdot 1 = 30$ m. To z kolei sprowadza się do: $s = x_{max} + |-5t^2|$, czyli ogólniej: $s = x_{max} + \left|\frac{1}{2}at^2\right|$.

Wygodnie jest czasem zapisać równanie drogi (wzór na drogę w funkcji czasu), choć jest to łatwe tylko dla ruchu jednostajnie zmiennego prostoliniowego. Ogólne równanie jest następujące:

$$s(t) = v_0 \pm \frac{1}{2}at^2$$

Przyjmujemy taką konwencję: jeśli ruch jest przyśpieszony, to znaki przy v_0 i a są zgodne (dodatnie); jeżeli ruch jest opóźniony, to przeciwne (najczęściej: dodatni przy v_0 i ujemny przy a). Musimy więc napisać osobne równania drogi dla każdego rodzaju ruchu. W przykładzie omawianym przed chwilą będzie: w pierwszym etapie $s(t) = 20t - 5t^2$, w drugim etapie: $s'(t) = 5t^2$.

Wróćmy jeszcze do przypadku ruchu prostoliniowego bez zawracania. Niech nasz ruch będzie nawet niejednostajnie zmienny. Zgodnie z wcześniejszym możemy drogę obliczyć wprost z prędkości:

$$s = \Delta x = x(t_2) - x(t_1) = \left.\int v(t)\mathrm{d}t\right|_{t_2} - \left.\int v(t)\mathrm{d}t\right|_{t_1}$$

Możemy zauważyć, że powyższa różnica realizuje definicję całki oznaczonej w granicach od t_1 do t_2 (różnica wartości funkcji pierwotnej w górnej i dolnej granicy). Zatem możemy w zwartej formie zapisać wzór na drogę w ruchu prostoliniowym bez zawracania (ogólniej: będzie to wzór na przemieszczenie) pokonaną między chwilami t_1 i t_2 jako całkę oznaczoną:

$$s = \Delta x = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t$$

Droga w ruchu krzywoliniowym.

W ogólnym przypadku ruchu krzywoliniowego droga jest długością krzywej (np. paraboli). Odpowiedź na pytanie o nią nie jest łatwa. Rozważmy ruch na płaszczyźnie $(x{,}y)$. Ustalimy wzór na drogę w ruchu krzywoliniowym na płaszczyźnie na 2 sposoby:

I. Motywacja fizyczna. Zgodnie z definicją prędkości, mała zmiana wektora położenia jest równa: $\mathrm{d}\vec{r} = \vec{v}(t)\mathrm{d}t$. Z kolei mała zmiana długości toru $\mathrm{d}s$ może być przybliżona odcinkiem o długości $|\mathrm{d}\vec{r}| = |\vec{v}(t)|\mathrm{d}t$. Całkowita długość toru w ruchu między chwilą t_1 a t_2 jest sumą tych małych przyczynków $\mathrm{d}s$, więc całką:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}(t)|\mathrm{d}t$$

$|\vec{v}(t)|$ jest wartością (długością) wektora prędkości w funkcji czasu.

II. Motywacja matematyczna. Mały fragment łuku o długości $\mathrm{d}s$ może być przybliżony odcinkiem, będącym z kolei długością wektora $\mathrm{d}\vec{s}$ o współrzędnych $(\mathrm{d}x{,}\mathrm{d}y)$ na płaszczyźnie. Zgodnie z tw. Pitagorasa długość wektora $\mathrm{d}\vec{s}$ jest równa: $\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$. Teraz kilka przekształceń:

$$s = \int \mathrm{d}s = \int \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \int \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{(\mathrm{d}x)^2}{(\mathrm{d}t)^2} + \frac{(\mathrm{d}y)^2}{(\mathrm{d}t)^2}}\mathrm{d}t =$$

$$= \int \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}(t)|\mathrm{d}t$$

Całka ta niekoniecznie jest prosta. Nawet w przypadku prostego rzutu poziomego, gdy $\vec{v}(t) = (v_0, -gt) \Rightarrow |\vec{v}(t)| = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}$, całka nie jest prosta (całka z funkcji pierwiastkowej). Zwróćmy też uwagę, że zgodnie z interpretacją graficzną całki oznaczonej, drogę możemy policzyć jako pole pod wykresem funkcji $|\vec{v}(t)|$ (wartości prędkości od czasu). Korzystaliśmy z tego faktu w ostatnim zadaniu z Zestawu 1 i jeszcze skorzystamy.