

ZESTAW 4

MECHANIKA FIZ-FT-1 S1

Kontakt: Radosław Strzałka, pok. 315/D10, mail: strzalka@fis.agh.edu.pl

Zestawy dostępne pod adresem: http://galaxy.agh.edu.pl/~strzalka/#dydaktyka#m_ft

Tematyka: ruch krzywoliniowy; biegunowy układ współrzędnych.

1. Zdefiniować składowe przyspieszenia (styczną i normalną) w ruchu krzywoliniowym. (*) Wyprowadzić wzór na przyspieszenie styczne i normalne (zwane też dośrodkowym):

$$a_s = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \quad a_n = a_d = \frac{v^2}{\rho}$$

gdzie $v = |\vec{v}|$ jest wartością prędkości liniowej ciała, a ρ – promieniem krzywizny, np. okręgu. (por. Orear R.3.4 lub Kaprzyk str. 28 lub HRW R.4.7).

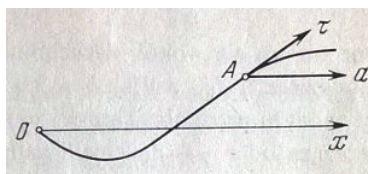
2. [Jezierski 14/15] Napisz równania parametryczne toru (równania położenia), a następnie wyznacz współrzędne wektora prędkości oraz przyspieszenia styczne i normalne w dowolnej chwili czasu dla ciała w rzucie ukośnym z prędkością początkową v_0 pod kątem α do poziomu. Oblicz wartości składowych a_s i a_n na początku rzutu i w najwyższym punkcie toru lotu.
3. Promień krzywizny ρ dowolnej krzywej zadanej w postaci funkcji $y = f(x)$ lub parametrycznej $(x(t), y(t))$ można obliczyć ze wzorów matematycznych:

$$y = f(x) : \quad \rho = \frac{(1+(y')^2)^{3/2}}{y''}, \quad \text{gdzie } y' = \frac{dy}{dx}$$
$$(x, y) = (x(t), y(t)) : \quad \rho = \frac{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}{x'y'' - y'x''}, \quad \text{gdzie } x' = \frac{dx}{dt}, y' = \frac{dy}{dt}$$

Proszę znaleźć promienie krzywizny (ze wzorów matematycznych, a także np. w oparciu o definicję przyspieszenia dośrodkowego) w następujących przypadkach:

- (a) w rzucie ukośnym z prędkością początkową v_0 pod kątem α (ruch po paraboli)
- (b) ruch po linii śrubowej (zastanowić się nad równaniem położenia punktu w takim ruchu – por. zad. 13c z Zestawu 2); podaj wielkość promienia krzywizny na początku rzutu i w najwyższym punkcie toru lotu
4. [Hennel I.18] Ćma porusza się po krzywej, której długość s dana jest funkcją czasu $s(t) = a e^{ct}$, gdzie a i c to stałe. Wiedząc, że wektor przyspieszenia (całkowitego) $\vec{a}$ tworzy stały kąt φ ze styczną do toru w każdym punkcie, znaleźć:
- (a) wartość prędkości w funkcji czasu;
- (b) przyspieszenie styczne i normalne w funkcji czasu;
- (c) promień krzywizny toru jako funkcję długości łuku krzywej.
5. Wprowadzić kinematyczne zmienne kątowe (położenie, prędkość i przyspieszenie kątowe), podać ich definicje. (*) Znaleźć związki zmiennych kątowych ze zmiennymi liniowymi ($\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, $\vec{a}_s = \vec{\epsilon} \times \vec{r}$, $\vec{a}_d = \vec{\omega} \times \vec{v}$).
- 6. [Jezierski 20/22] Koło o promieniu $R = 2$ m obraca się tak, że kąt obrotu promienia koła zależy od czasu w następujący sposób: $\varphi(t) = A + Bt + Ct^3$, gdzie $B = 4$ rad/s, $C = 3$ rad/s³. Wyznaczyć po czasie $t = 2$ s od momentu rozpoczęcia ruchu dla punktów położonych w odległości $3R/4$ od osi obrotu:
- (a) prędkość kątową i przyspieszenie kątowe;
- (b) prędkość liniową;
- (c) przyspieszenie styczne, normalne i całkowite.
- 7. [HRW Z.26/R.11] Koło zamachowe silnika parowego obraca się z szybkością 150 obr/min. Po zamknięciu strumienia pary wskutek tarcia i oporów pary koło zatrzymuje się po upływie 2,2 h.
- (a) Ile wynosi (stałe) przyspieszenie kątowe koła?

- (b) Ile obrotów wykona to koło od chwili odcięcia pary do zatrzymania?
- (c) Ile wynosi składowa styczna przyspieszenia liniowego punktu na kole, znajdującego się w odległości 50 cm od osi obrotu w chwili, gdy koło wykonuje 75 obr/min?
- (d) Ile wynosi wówczas wartość całkowitego przyspieszenia liniowego tego punktu?
8. Samochód w czasie $t = 5$ s rozpędza się od zerowej prędkości, jadąc ze stałym przyspieszeniem. Oblicz przyspieszenie kątowe i końcową prędkość kątową kół samochodu, jeśli w czasie rozpędzania koła o średnicy $D = 50$ cm wykonają $N = 50$ obrotów. Jaka drogę w tym czasie pokonał samochód? Wyprowadź wzory końcowe i wyraż je przez t, D, N . Uwaga! Czy $\omega = \frac{2\pi N}{t}$?
- 9.* [Irodow 1.11.] Cząstka porusza się po zakrzywionym torze ze stycznym przyspieszeniem $w_\tau = \mathbf{a} \circ \boldsymbol{\tau}$, gdzie $\mathbf{a}$ jest stałym wektorem o kierunku zgodnym z osią x , a $\boldsymbol{\tau}$ – wektorem jednostkowym, którego kierunek pokrywa się z kierunkiem prędkości w danym punkcie toru (rys. 1). Znaleźć zależność prędkości cząstki od x , jeśli w punkcie $x = 0$ jej prędkość można zaniedbać.



Rysunek 1: zad. 9

10. [Hennel I.46] Koło o promieniu R toczy się po prostej ruchem jednostajnym z prędkością kątową ω . Dla punktu leżącego na obwodzie koła znaleźć:
- równania ruchu,
 - równanie toru (cykloida),
 - całkowitą drogę s pomiędzy dwoma kolejnymi zetknięciami z prostą, po której się toczy koło,
 - całkowite przyspieszenie a .
- Narysować tor punktu. Przyjąć w chwili $t = 0$: $x = 0, y = 0$.

11. [Jezierski 21/22] Ruch punktu poruszającego się na płaszczyźnie dany jest w układzie kartezjańskim równaniami:

$$x(t) = bt^2, \quad y(t) = ct^2, \quad (b, c > 0 - \text{stałe}).$$

Znaleźć parametryczne równania ruchu w układzie biegunowym, tor ruchu punktu oraz prędkość i przyspieszenie w obu układach odniesienia.

- △ 12. [Hennel I.9] Kółka tarcza o promieniu R wiruje wokół swojej osi ze stałą prędkością kątową ω . Ze środka tarczy wyrusza biedronka, która porusza się ze stałą prędkością v_0 wzdłuż wybranego promienia. Znaleźć:
- równanie toru biedronki w układzie kartezjańskim i biegunowym,
 - zależność od czasu wektora $\vec{v}$ oraz jego składowych: radialnej v_r i transwersalnej v_φ ,
 - zależność od czasu wektora przyspieszenia $\vec{a}$ oraz jego składowych: radialnej a_r i transwersalnej a_φ oraz stycznej a_s i normalnej a_n ,
 - zależność wartości promienia krzywizny od czasu (promień krzywizny: $\rho = \frac{v^2}{a_n}$),
 - e*) całkowitą długość drogi przebytej przez biedronkę.
- 13.* [Hennel I.10] Wiedząc, że podczas ruchu punktu P kąt pomiędzy kierunkiem wektora wodzącego $\vec{r}$ a kierunkiem prędkości $\vec{v}$ jest stały i wynosi α ($\alpha < 90^\circ$), znaleźć we współrzędnych biegunowych tor ruchu punktu P . Przyjąć warunki początkowe $r(0) = r_0, \varphi(0) = 0$. Proszę znaleźć całkowitą długość toru (czas biegnie do nieskończoności).
- △ 14. Dla punktu znajdującego się na końcu śmigła samolotu, lecącego ze stałą prędkością v_0 proszę zapisać równania ruchu w kartezjańskim i walcowym układzie odniesienia. Proszę znaleźć wartości przyspieszeń stycznego i normalnego tego punktu w funkcji czasu.