

ZESTAW 5

MECHANIKA FHS-FT-1 S1

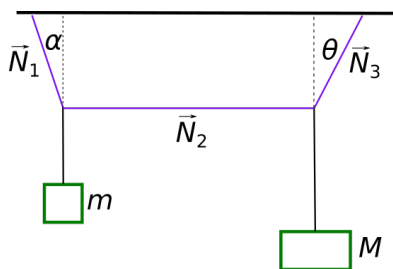
Kontakt: Radosław Strzałka, pok. 315/D10, mail: strzalka@fis.agh.edu.pl

Zestawy dostępne pod adresem: http://galaxy.agh.edu.pl/~strzalka/#dydaktyka#m_ft

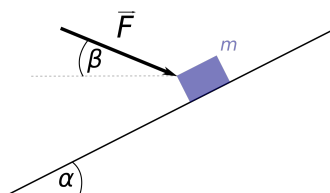
Tematyka: dynamika punktu materialnego, zasady Newtona, tarcie, układ ciał połączonych, siła oporu.

1. Układ pokazany na rys. 1a jest w równowadze i sznurek w centrum jest dokładnie w poziomie. Znaleźć naprężenia N_1, N_2, N_3 oraz kąt θ , jeśli znane są masy m, M i kąt α .
2. [Hennel III.2.] Cząstka o masie $m = 3$ kg porusza się w polu siły $\vec{F}$ zależnej od czasu w następujący sposób: $\vec{F} = (15t, 3t - 12, -6t^2)$ N. Przyjmując warunki początkowe $\vec{r}_0 = (5, 2, -3)$ m, $\vec{v}_0 = (2, 0, 1)$ m/s znaleźć zależność położenia i prędkości od czasu.
3. [HRW Z.21/R.5] Elektron poruszający się z poziomą prędkością $1,2 \cdot 10^7$ m/s wchodzi w obszar, w którym działa na niego stała siła pionowa o wartości $4,5 \cdot 10^{-16}$ N. Masa elektronu wynosi $9,11 \cdot 10^{-31}$ kg. O ile zmieni się w pionie położenie elektronu w czasie, gdy przebędzie on w poziomie dystans 30 mm.
4. [Wolny 3.7.] Jaką siłą należy działać na masę 1 kg, aby w ciągu 1 s podnieść ją na wysokość 2 m?
5. Dwa klocki o masach m_1 i m_2 połączono liną przerzuconą przez bloczek. Lina i bloczek są nieważkie, lina dodatkowo jest nierozciągliwa. (Taki układ nazywamy maszyną Atwooda.) Oblicz przyspieszenie układu, jeśli $m_1 > m_2$. Jaki jest naciąg N liny? Jaka siła P przenosi się na oś zamocowania bloczka? Ile wynosi masa zredukowana układu, czyli stosunek P/g ?
6. [ODI 2014/15-I-1] Bloczek A wisi na stałe pod sufitem. Do liny przerzuconej przez bloczek A podwieszone są: z jednej strony ciało o masie $m_1 = 4$ kg, a z drugiej strony zamocowanie osi obrotu drugiego bloczka B. Przez bloczek B przerzucona jest linka, na której końcach wiszą ciała o masach $m_2 = 1$ kg i $m_3 = 3$ kg. Zaniedbaj masy bloczków i lin.
 - (a) Oblicz przyspieszenie, z jakim porusza się ciało o masie m_1 . *Uwaga. Zapisz równania dynamiki wszystkich mas i odpowiednie związki między przyspieszeniami - otrzymasz układ 5 równań.*
 - (b) Ile wynosiłoby przyspieszenie, gdyby masy ciał spełniały zależność: $m_2 = m_3 = m_1/2$?
 - (c) Rozwiąż jeszcze raz zadanie z wykorzystaniem pojęcia masy zredukowanej dla bloczka B i mas m_2, m_3 .
7. [Jezierski 30/34] Na stole połączono liną trzy klocki o masach m_1, m_2 i m_3 , do których liną przerzuconą przez nieruchomy bloczek przymocowano masę M zwisającą ze stołu. Znaleźć przyspieszenie a układu mas oraz naprężenia wszystkich lin w przypadku, gdy pomijamy tarcie klocków o stół oraz gdy współczynnik tarcia wynosi f . W obu przypadkach pomijamy tarcie liny o bloczek. Jaka musi być masa M , aby w obu przypadkach ruch był możliwy?
8. Oblicz czas zsuwania się klocka z równi pochyłej o kącie nachylenia do poziomu α i wysokości h oraz jego prędkość końcową na dole równi. Rozważ przypadek bez tarcia i z tarcie o współczynniku f . Porównaj wynik z czasem i prędkością końcową w spadku swobodnym.
9. Chłopiec pcha pod górę o nachyleniu α sanki o masie m siłą skierowaną w dół względem zbocza góry pod kątem β , liczącym od poziomu (rys. 1b). Współczynnik tarcia sanek o śnieg wynosi f . Ile wynosi siła F przyłożona przez chłopca, jeśli sanki poruszają się ruchem jednostajnym. Dla jakiego kąta β' chłopiec wepchnie sanki na szczyt góry po najkrótszym czasie, jeśli nadal przykłada siłę F .
10. [Hennel III.23.] Punkt materialny o masie m znajduje się na zboczu w kształcie paraboli $y = ax^2$ ($a > 0$). Współczynnik tarcia jest równy f . Całość znajduje się polu grawitacyjnym ziemskim. Znaleźć maksymalną wysokość h_{max} , na której punkt będzie pozostawać w spoczynku.
- 11.* [Irodow 1.38.] Ciało zsuwa się po powierzchni nachylonej pod kątem α do poziomu. Współczynnik tarcia k zależy od przebytej drogi x w następujący sposób: $k(x) = bx$, gdzie b jest dodatnim współczynnikiem. Znaleźć drogę x , po przebyciu której klocek się zatrzyma, oraz maksymalną prędkość klocka na tej drodze.
- 12.* [Hennel III.30.] Znaleźć zależność od prędkości siły oporu działającej na ciało o masie m , które poruszając się wzdłuż osi x przebywa odcinek $(0, x)$ w czasie $t = ax^2 + bx + c$, gdzie a, b, c są stałymi.

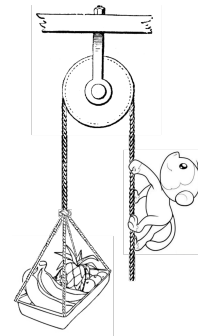
- 13.* Ciało o masie m zsuwa się z tarcie o współczynniku μ w polu grawitacyjnym po krzywej o równaniu $y(x) = \frac{1}{4}(x^2 - \ln(x^2) - 1)$ (oś x w pionie, oś y w poziomie). Znajdź zależność składowej ściąągającej ciężaru i siły tarcia w funkcji wysokości nad poziomem x .
14. [Hennel III.33.] Samochód o masie m jest hamowany siłą oporu $F = -kv^2$. Jaką drogę przebędzie samochód, zanim jego prędkość zmaleje do połowy? (*Wskazówka. Patrz **Komentarz** poniżej*).
15. [Hennel III.15.] Na linie przerzuconej przez nieruchomy blok i przyczepionej do masy M znajduje się małpa o masie m (rys. 1c). Znaleźć przyspieszenie układu w następujących przypadkach:
 (a) małpa nie porusza się względem liny,
 (b) małpa wspina się po linie ze stałą prędkością v_0 względem liny,
 (c) małpa wspina się po linie ze stałym przyspieszeniem a_0 względem liny.
 Przyjąć, że masa M porusza się bez tarcia.
- Cykl zadań dot. ruchu ciał ze zmienną masą (16,17,18). Jako wprowadzenie polecam Rozdział 3.9. **Skryptu**.*
16. [Irodow 1.80.] Wagon A o masie m porusza się w prawo pod wpływem stałej siły $\mathbf{F}$ (rys. 1d). Do wagonu sypie się piasek ze stałą szybkością μ [kg/s]. Znaleźć prędkość i przyspieszenie wagonu jako funkcje czasu, w czasie trwania załadunku, zakładając niezerową prędkość początkową $v_0 \neq 0$. Tarcie kół o szyny zaniedbać. *Wskazówka. $mdv + vdm = d(mv)$.*
17. [Irodow 1.79.] Wózek z piaskiem porusza się po poziomej płaszczyźnie pod wpływem stałej siły $\mathbf{F}$, której kierunek jest zgodny z kierunkiem jego prędkości. Piasek wysypuje się przez otwór w dnie ze stałą prędkością μ [kg/s]. Znaleźć przyspieszenie i prędkość wózka w dowolnej chwili t , jeśli w chwili $t = 0$ wózek miał masę m_0 i spoczywał ($v_0 = 0$). Zaniedbać tarcie.
18. Samolot odrzutowy porusza się ze stałą prędkością 250 m/s, co również jest prędkością zasysanego powietrza do silnika (powietrze stoi względem układu nieruchomego). W każdej sekundzie spalana jest mieszanina 75 kg powietrza i 3 kg paliwa lotniczego w silniku, a gazy spalinowe są wyrzucane z prędkością 500 m/s względem rakiety. Jaka jest całkowita siła ciągu samolotu?
19. [por. Hennel III.20 i III.21.] Na gładkim stole leży sznur o długości L , którego $1/n$ -ta zwisa swobodnie ze stołu. Napisać równanie dynamiki sznura i (*) obliczyć czas, po którym cały sznur spadnie ze stołu. Przyjąć, że między sznurem a stołem występuje tarcie o współczynniku f .



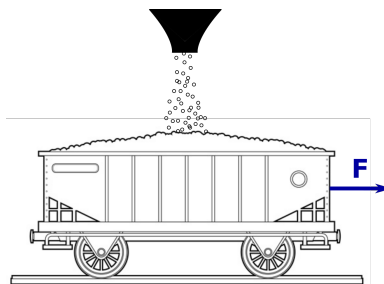
(a) rys. do zad. 1



(b) rys. do zad. 9



(c) rys. do zad. 15



(d) rys. do zad. 16

Rysunek 1

Komentarz do zad. 14

Równanie dynamiki, $ma = -kv^2$, które chcielibyśmy rozwiązać ze względu na zależność $v(t)$, jest tzw. równaniem różniczkowym, bo niewiadoma, $v(t)$, występuje w postaci pochodnej. Najprostszą metodą rozwiązywania równań różniczkowych jest metoda przez zwykłe całkowanie. Równanie trzeba sobie jednak wcześniej odpowiednio przygotować, zanim przystąpi się do całkowania. W tym celu używa się tzw. metody *separacji zmiennych*. Rozważmy przykład matematyczny:

Niech nasze równanie różniczkowe na niewiadomą $y(x)$ będzie postaci:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \quad (1)$$

gdzie $g(x)$ oraz $h(y)$ są jakimiś funkcjami zmiennych x i y , odpowiednio. Zakładamy tutaj, że prawą stronę równania da się w ten sposób przedstawić. Potencjalnymi dwiema zmiennymi, po których możemy całkować, są właśnie x i y . Metoda separacji zmiennych polega na tym, że przekształcamy równanie (1) tak, żeby wszystkie zależności zmiennej x były np. po prawej stronie równania, a wszystkie zależności y - po lewej. W naszym przypadku:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \quad \Big| \cdot dx : h(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{h(y)} = g(x)dx \quad (2)$$

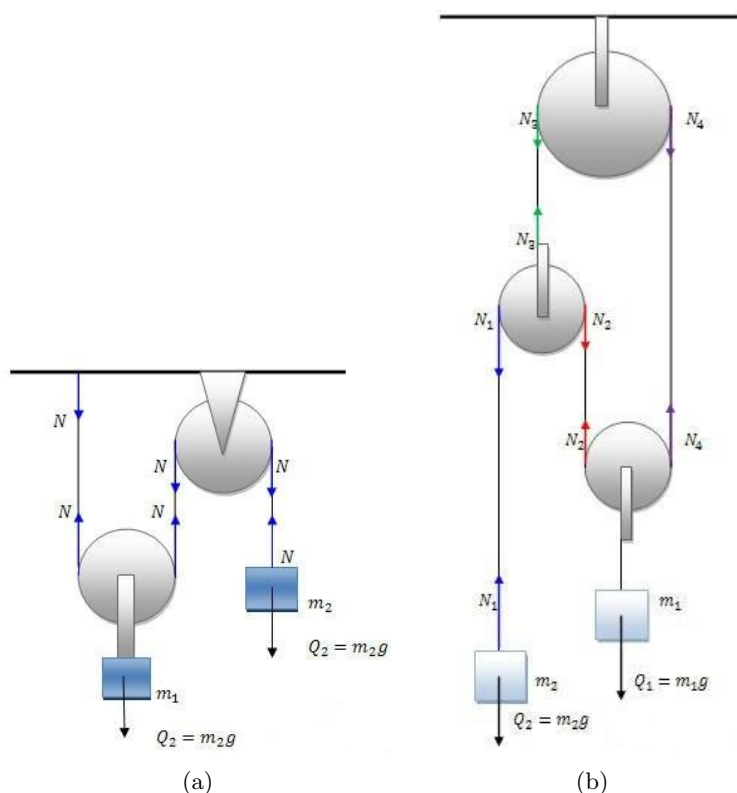
Teraz możemy obustronnie całkować nasze równanie (każdą stronę „po swojej zmiennej”) w wybranych granicach, np. $x : x_0 \rightarrow x$, $y : y_0 \rightarrow y$:

$$\int_{y_0}^y \frac{dy}{h(y)} = \int_{x_0}^x g(x)dx \quad (3)$$

W przypadku zadania chcemy znaleźć rozwiązanie $v(t)$, a więc będziemy całkować po prędkości i czasie.

Gdy zostanie czasu... lub do samodzielnego rozwiązania

- I [Cedrik 2.9.] Ciało, któremu nadano prędkość początkową v_0 skierowaną wzdłuż równi pochyłej, wznosi się, a następnie zsuwa z tej równi. Ile razy czas zsuwania się jest większy od czasu wznoszenia na tym samym odcinku drogi s ? Znaleźć stosunek prędkości końcowej zsuwania do prędkości początkowej przy wznoszeniu. Współczynnik tarcia pomiędzy ciałem i równią $k = 0,2$, a kąt nachylenia równi $\alpha = 45^\circ$.
- II [por. Cedrik 2.16.] Na szczycie dwustronnej równi pochyłej o kątach nachylenia α i β zamontowano bloczek o znikomo małej masie, mogący obracać się bez tarcia. Przez bloczek przełożono nieważką i nierozciągliwą linę, na końcach której umieszczono dwa klocki o masach m_1 i m_2 . Klocki mogą poruszać się po równi bez tarcia.
- Z jakim przyspieszeniem porusza się układ? Jakie jest napięcie liny?
 - Przyjmując, że w chwili początkowej oba klocki były nieruchome, obliczyć stosunek mas m_1/m_2 , przy którym układ pozostanie w spoczynku.
 - Porównać dynamikę tego układu z maszyną Atwooda.
- III Na rys. 2 przedstawiono układ nieważkich bloczków, na których zawieszono masy przy użyciu lekkich i nierozciągliwych lin. Obliczyć:
- [por. Cedrik 2.20.] Przyspieszenie mas m_1 i m_2 w układzie na rys. 2a
 - ^{*} Przyspieszenie masy m_1 z układu na rys. 2b.
- IV [por. Irodow 1.30.] Niewielkie ciało zaczyna zsuwać się z wierzchołka klina o długości podstawy d . Współczynnik tarcia między ciałem a klinem wynosi k . Dla jakiego kąta nachylenia klina czas zsuwania będzie najkrótszy? Ile on wyniesie?
- V [por. Irodow 1.29.] Na gładkiej poziomej płaszczyźnie leży deska o masie M , a na niej klocek o masie m . Do deski przyłożono poziomą siłę proporcjonalną do czasu jak $F(t) = bt$, gdzie b jest stałą. Znaleźć zależności przyspieszeń deski i klocka od czasu, jeżeli współczynnik tarcia między deską i klockiem wynosi k . Sporządzić wykresy tych zależności.



Rysunek 2: rys. do zad. III