

ZESTAW 9

MECHANIKA FHS-FT-1 S1

Kontakt: Radosław Strzałka, pok. 315/D10, mail: strzalka@fis.agh.edu.pl

Zestawy dostępne pod adresem: http://galaxy.agh.edu.pl/~strzalka/#dydaktyka#m_ft

Tematyka: drgania mechaniczne; oscylator harmoniczny; wahadło matematyczne; tłumienie, wymuszenie i rezonans mechaniczny; małe drgania.

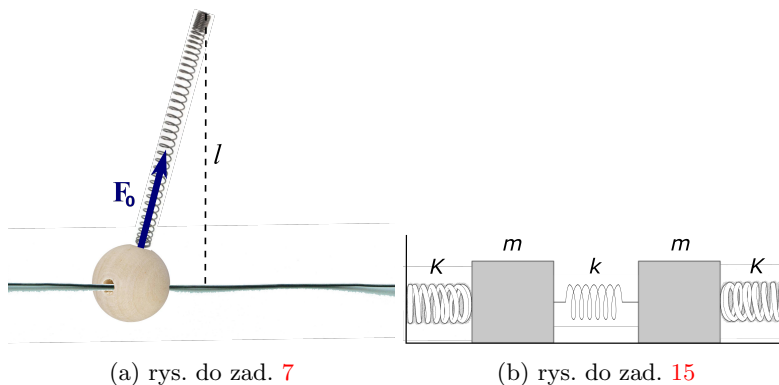
1. Zapisz równanie dynamiki dla masy drgającej poziomo na sprężynie i je rozwiąż (wyprowadź $x(t)$). Oblicz zależności $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$, $v(x)$ oraz $E_k(t)$ i $E_p(t)$. Pokaż, że energia mechaniczna oscylatora jest stała.
2. [por. Cedrik 8.6.] Zakładając, że ruch tłoka w cylindrze silnika samochodowego jest ruchem harmonicznym, znaleźć maksymalne wartości szybkości i przyspieszenia tłoka, jeżeli samochód porusza się z prędkością $v = 72 \text{ km/h}$ na włączonym biegu (przyjmijmy, że przełożenie wynosi w tym przypadku 3:1). Średnica kół $d = 16''$, a odległość między skrajnymi położeniami (skok) tłoka wynosi 95,5 mm.
3. Na poziomym stole leży klocek o masie M , przytwierdzony do ściany za pomocą sprężyny o stałej siłowej k . Na klocek kładziemy małą masę m , współczynnik tarcia między ciałami wynosi f . Tarcie korka o stół można zaniedbać. Klocek wprawiamy w drgania. Ile może wynosić maksymalnie amplituda tych drgań, aby masa m nie spadła z korka?
4. Napisz równanie ruchu $x(t)$ oscylatora zbudowanego z ciężarka o masie 3 kg zawieszonego na sprężynie, którego całkowita energia drgań harmoniczných wynosi 10 J, a okres drgań to 2 s. Załóż, że w chwili początkowej położenie oscylatora ma współrzędną $x(0) = 30 \text{ cm}$. Założmy teraz, że taki oscylator (masę na sprężynie) zawieszamy u sufitu i wprawiamy w drgania. Znajdź położenie równowagi, wokół którego zachodzą drgania. Załóż, że sprężyna ma długość swobodną zero.
- 5. Poruszający się po poziomym stole klocek o masie 2,5 kg uderza w leżącą poziomo sprężynę o stałej siłowej 320 N/m, która jest przytwierdzona drugim końcem do ściany. Klocek zatrzymuje się, gdy sprężyna jest ściśnięta o 7,5 cm. Współczynnik tarcia między korkiem a podłożem wynosi 0,25. Jaka była prędkość korka tuż przed uderzeniem? O ile dzuły większa byłaby maksymalna energia sprężystości, jeśli sprężynę ścisnąć o dodatkowe 1,5 cm?
- 6. [Irodow 1.193.] Ciało o masie m spadło z wysokości h na szalkę wagi sprężynowej. Masę szalki i sprężyny można zaniedbać. Stała sprężystości sprężyny wynosi k . Przyłgnąwszy do szalki, ciało wykonuje drgania harmoniczne w kierunku pionowym. Znaleźć okres tych drgań, amplitudę i ich energię.
- △ 7. Punkt o masie m może poruszać się tylko po prostej i jest przyczepiony do sprężyny zamocowanej w odległości l od prostej (rys. 1a). Sprężyna o długości l jest naciągnięta siłą F_0 . Znaleźć częstość małych drgań masy m wzdłuż prostej.
8. Sprężynę o stałej siłowej $k = 100 \text{ N/m}$ przecięto w połowie długości. Przecięte sprężyny, ustawione obok siebie, podtrzymują klocek, który wykonuje drgania z częstotliwością $f = 10 \text{ Hz}$. Oblicz masę korka M .
9. Wyprowadź wzór na okres małych drgań wahadła matematycznego nietłumionego. Następnie dla wahadła drgającego zgodnie z równaniem $\alpha = \alpha_0 \cos(\omega t + \varphi)$ wyznacz zależność napięcia nici od czasu. Kiedy nieć najprawdopodobniej się zerwie?
- △ 10. [Jezierski D83.] Jeżeli wagon jest w spoczynku, to częstotliwość drgań wahadła matematycznego znajdującego się w tym wagonie wynosi $f = 0,5 \text{ Hz}$. Oblicz częstotliwość drgań tego wahadła w wagonie poruszającym się po poziomym torze z przyspieszeniem $a_0 = 4,9 \text{ m/s}^2$. Płaszczyzna drgań wahadła jest równoległa do kierunku ruchu wagonu.
11. [Jezierski 93.] Na pionowo wiszącej sprężynie zawieszono ciężarek, co spowodowało wydłużenie sprężyny o 9,8 cm. Ciężarek ten wprawiono w drgania, odcinając go w dół i puszczając. Jaką wartość powinien mieć współczynnik tłumienia β , jeżeli:
 - (a) drgania ustały po 10 s (przyjmijmy umownie, że drgania ustają, gdy ich amplituda spada do 1% wartości początkowej);
 - (b) ciężarek powrócił aperiodycznie do położenia równowagi;
 - (c) logarytmiczny dekrement tłumienia był równy $\Lambda = 6$? (definicja - kliknij w link)

12. [por. HRW Z.63/R.15 T.2] Znajdź wzór na amplitudę A drgań oscylatora wymuszonego wyprowadź wzór na częstość rezonansową oraz oblicz amplitudę drgań i amplitudę prędkości ciała drgającego w rezonansie.
- 13* [Irodow 1.218] Pod wpływem zewnętrznej pionowej siły $F = F_0 \cos \omega t$ ciało zawieszone na sprężynie wykonuje stacjonarne drgania wymuszone zgodnie z równaniem $x = a \cos(\omega t - \alpha)$. Znajdź pracę siły F w czasie jednego okresu. Wykazać, że praca ta jest zużywana na pokonanie sił tarcia.
14. Znajdź równanie drgań wypadkowych powstałych w wyniku superpozycji dwóch drgań:
- w tym samym kierunku i o tych samych amplitudach, ale o różnej częstości;
 - w kierunkach prostopadłych, o tych samych częstościach, ale różnych amplitudach, z przesunięciem fazowym $\frac{\pi}{2}$;
 - *c) w kierunkach prostopadłych, o tych samych amplitudach, ale różnych częstościach, $\omega_2/\omega_1 = n$, $n \in \mathbb{Z}$.
15. Dwa klocki o jednakowych masach m połączone są sprężynami o długości swobodnej zero (rys. 1b). Sprężyny łączące klocki ze ścianami mają stałe siłowe K , zaś sprężyna łącząca klocki ze sobą ma stałą siłową k . Proszę wyliczyć położenia równowagi klocków i napisać równania ruchu dla każdego z klocków, definiując wychylenia z położenia równowagi jako x_1, x_2 . (*) Proszę spróbować rozwiązać te równania poprzez przejście do nowych zmiennych: $w = (x_1 + x_2)$, $u = (x_2 - x_1)$.
16. [Przybliżenie małych drgań, por. Orear rozdz. 11.5.] Proszę wykazać, że jeśli znana jest energia potencjalna w funkcji przesunięcia $U(x)$, to masa umieszczona w takim polu potencjalnym wykonuje drgania o okresie

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x_0}}}, \quad (1)$$

gdzie x_0 oznacza położenie równowagi ciała (energia U ma minimum). *Wskazówka.* Wykorzystaj rozwinięcie funkcji $U(x)$ wokół położenia równowagi x_0 .

- Na tej podstawie znajdź okres małych drgań kostki lodu umieszczonej w kulistej misce o promieniu 10 cm, jeśli kostkę odchyłono początkowo nieco w górę po ścianie.
- Wykorzystując wzór (1) wykaż, że okres małych drgań wahadła matematycznego rzeczywiście dany jest wzorem $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$.



Rysunek 1

17* [Okres drgań wahadła matematycznego - rozwiązanie pełne]

Całkowita energia wahadła matematycznego odchylonego z położenia równowagi o dowolny kąt φ wynosi

$$E = mgl(1 - \cos \varphi) + \frac{m}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 l^2.$$

Zakładamy położenie równowagi (zerową energię potencjalną) w najniższym położeniu wahadła. W maksymalnym wychyleniu φ_0 wahadło ma tylko energię potencjalną

$$E_{max} = mgl(1 - \cos \varphi_0).$$

Porównując oba wzory otrzymujemy (zasada zachowania energii mechanicznej):

$$\left(\frac{d\varphi}{dt} \right) = \pm \sqrt{\frac{2g}{l} (\cos \varphi - \cos \varphi_0)},$$

gdzie $+/-$ odpowiada ruchowi w prawo/lewo. Aby znaleźć okres drgań przekształcamy wzór i całkujemy:

$$t = \int_0^t dt = \int_0^{\varphi_0} \sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}},$$

przy czym okres $T = 4t$. Po podstawieniu $\sin \xi = \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}}$ otrzymujemy wzór na okres:

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \xi}}.$$

Otrzymujemy całkę eliptyczną, której nie da się rozwiązać analitycznie. Można zbadać zachowanie funkcji dla małych amplitud φ_0 . Niech $\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} = u$. Rozwijając u wokół $\varphi_0 \rightarrow 0$ mamy $u \approx \left(\frac{\varphi_0}{2}\right)^2 + \dots = \frac{1}{4}\varphi_0^2 + \dots$. Natomiast okres można przybliżyć przez: $T(u) \approx T(0) + \frac{dT}{du} \Big|_{u=0} u + \dots$. Oczywiście $T(0) = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\xi = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. Liczymy pochodną funkcji T po u :

$$\frac{dT}{du} = \frac{d}{du} \left[4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - u \sin^2 \xi}} \right] = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \xi d\xi}{(1 - u \sin^2 \xi)^{3/2}},$$

$$\frac{dT}{du} \Big|_{u=0} = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \xi d\xi = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Zatem wynik rozwinięcia okresu w szereg jest następujący:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\varphi_0^2}{16} + \dots \right)$$

Poprawka dla np. $\varphi_0 = 15^\circ$ wynosi ok. 0,5%, natomiast dla $\varphi_0 = 60^\circ$ - ok. 7%.