

# ZESTAW 1

MECHANIKA I FIZYKA STATYSTYCZNA FIIS-MiNWB-1 S1

Kontakt: Radosław Strzałka, pok. 315/D10, mail: [strzalka@fis.agh.edu.pl](mailto:strzalka@fis.agh.edu.pl)

Zestawy dostępne pod adresem: [http://galaxy.agh.edu.pl/~strzalka/#dydaktyka#mifs\\_mnb](http://galaxy.agh.edu.pl/~strzalka/#dydaktyka#mifs_mnb)

Tematyka: wprowadzenie matematyczne: układy równań, wektory, pochodne, całki.

Proszę się zapoznać z **materiałami wprowadzającymi** do tematyki na bardzo podstawowym poziomie: [link](#) oraz [link](#)

1. Rozwiąż układy równań dwóch lub trzech zmiennych. (W przykładach c) i g) niewiadomymi są  $r, \varphi, \vartheta$ , natomiast  $x, y$  i  $z$  są znane.)

a) 
$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} y = x^2 - 16 \\ 3y - 2x = 8 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} 6y = 2x^2 - 18 \\ y - 2 = x + 1 \end{cases}$$

e) 
$$\begin{cases} x^2 + 9 = 2y \\ 3x = 8 - y \end{cases}$$

f) 
$$\begin{cases} 4x^2 - 4x = y - 1 \\ 2x - 1 = -3y \end{cases}$$

g) 
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \vartheta \\ y = r \sin \varphi \sin \vartheta \\ z = r \cos \vartheta \end{cases}$$

h) 
$$\begin{cases} 7a = 3 - 4b \\ 2a = 4b - 5c + 1 \\ a = 2 + 5c \end{cases}$$

2. Mamy trzy wektory  $\vec{a} = [0, -3, 1]$ ,  $\vec{b} = [1, 2, -1]$ ,  $\vec{c} = [-2, 2, 6]$ . Sprawdź, czy są wśród nich pary wektorów prostopadłych. Znajdź iloczyn wektorowy  $\vec{a} \times \vec{b}$ . Oblicz iloczyn mieszany  $\vec{c} \circ (\vec{a} \times \vec{b})$ .
3. Proszę wykazać, że objętość graniastosłupa zbudowanego przez trzy wektory jest dana przez ich iloczyn mieszany.
4. Znajdź pary wektorów prostopadłych spośród trójki:  $\vec{u} = [1, 0, -3]$ ,  $\vec{v} = [4, -2, 2]$ ,  $\vec{w} = [3, 2, 1]$ . Jakie są kąty pomiędzy wszystkimi parami wektorów? Ile wynosi objętość graniastosłupa zbudowanego przez te wektory.
5. [HRW Z.34/3] W równaniu  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$  przyjmij  $q = 2$ ,  $\vec{v} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$  i  $\vec{F} = 4\hat{i} - 20\hat{j} + m\hat{k}$  (w umownych jednostkach). (i) Ile wynosi stała  $m$ ? (ii) Ile wynosi wektor  $\vec{B}$ , wyrażony przez wektory jednostkowe, jeśli  $B_x = B_y$ ?
6. [HRW Z.23/3] Udowodnij, że jeśli suma dwóch wektorów jest prostopadła do ich różnicy, to muszą one mieć jednakową długość.
7. [Wolny 1.1.2.] Udowodnij, że jeśli długość sumy wektorów jest równa długości ich różnicy, to wektory te muszą być prostopadłe.
8. [HRW Z.25/3] Dwa wektory, których długości wynoszą  $a$  i  $b$ , tworzą ze sobą kąt  $\theta$ , gdy ich początki znajdują się w jednym punkcie. Wyznaczając ich składowe w prostokątnym układzie współrzędnych udowodnij, że suma  $\vec{r}$  tych wektorów ma długość:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta}$$

9. Użyj danych z zadania 2, aby znaleźć długość  $r$  wektora  $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$  (do obliczeń wykorzystaj kalkulator, nie zapisując żadnych danych na kartce/tablicy). Następnie, JEDNYM rachunkiem na kalkulatorze potwierdź ten wynik, korzystając ze wzoru z zadania 8.
10. Korzystając z definicji pochodnej, oblicz pochodną funkcji:

a)  $f(x) = x^2$

b)  $f(x) = \sin x$

c)  $f(x) = 1/x^2$

d)  $g(x) = \cos x$

11. Korzystając ze wzorów na pochodne funkcji podstawowych (patrz materiały dostępne pod linkiem), oblicz pochodne następujących funkcji:

a)  $3 + x^5$

b)  $\frac{1}{2} \sin x$

c)  $\frac{2}{x^2}$

d)  $(5 - x^3)^2$

e)  $3 \cos(x^2 - 1)$

f)  $x^2 e^{-2x^2}$

g)  $\ln \frac{1}{1-x^2}$

Uwaga.  $e^x$  jest funkcją eksponencjalną, czyli funkcją wykładniczą o podstawie logarytmu naturalnego.

12. Proszę znaleźć równanie prostej stycznej do krzywej będącej wykresem funkcji  $f(x) = 3 + 2x^2 + x^3$  w dwóch przypadkach: w punkcie  $x_0 = 1$  oraz punkcie  $x_0 = 0$ .

*Uwaga. Do znalezienia wyrazu wolnego 'b' w równaniu prostej trzeba wykorzystać fakt, że punkt  $(x_0, f(x_0))$  należy zarówno do krzywej, jak i stycznej.*

13. Pochodna często służy nam do znajdowania tzw. ekstremum lokalnego funkcji (maksimum lub minimum funkcji w pewnym zakresie dziedziny). Warunkiem koniecznym występowania ekstremum lokalnego jest zerowanie się pierwszej pochodnej funkcji. Z tego warunku znajdujemy wszystkie argumenty  $x_0$ , dla których funkcja może mieć ekstremum (punkt  $x_0$  nazywa się w matematyce „punktem podejrzanym o ekstremum”):

$$\text{Funkcja ma ekstremum lokalne w } x_0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0 \Rightarrow x_0 = \dots$$

- a) Znajdź ekstrema następujących funkcji:  $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$ ,  $g(x) = e^{-(x-a)^2}$  ( $a$ -parametr)
- b) Moc wydzielona na oporniku  $R$  podłączonym do źródła napięcia o sile elektromotorycznej  $\varepsilon$  i oporze wewnętrznym  $r$  wynosi:  $P = \frac{\varepsilon^2 R}{(r+R)^2}$ . Traktując moc jako funkcję oporu  $P(R)$  oblicz, dla jakiej wielkości oporu  $R$  moc jest maksymalna. Ile ona wynosi?
14. Wierzchołek paraboli jest jej ekstremum (globalnym). Wiedząc to, oblicz współrzędne  $W(p, q)$  wierzchołka paraboli o ogólnym równaniu  $y(x) = ax^2 + bx + c$ .
15. Całka (wynik całkowania) jest funkcją pierwotną do funkcji danej (całkowanej). Oznacza to, że pochodna funkcji, będącej wynikiem całkowania, ma być funkcją pierwotną:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \text{ (C-stała)} \Leftrightarrow f(x) = (F(x))'$$

Korzystając z tej definicji, „zgadnij” wynik całkowania następujących funkcji:

- a)  $2x$                       b)  $\sin x, \sin(\omega t)$  ( $\omega$ -stała,  $t$ -zmienna)                      c)  $4x^3 - x$                       d)  $xe^{-x^2}$
16. Tak jak pochodna ma interpretację geometryczną, tak i całka (oznaczona). Pozwala ona obliczyć pole powierzchni pod krzywą zdefiniowaną funkcją podcałkową  $f(x)$ . Całkę oznaczoną w granicach  $(a, b)$  obliczamy następująco:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

W ten sposób możemy np. obliczać drogę przebytą przez ciało jako pole powierzchni pod zależnością  $v(t)$  albo pracę jako pole powierzchni pod zależnością  $F(x)$ .

- a) Proszę obliczyć pole powierzchni ograniczonej parabolą  $y = x^2$  i osią  $x$  w przedziale  $x \in \langle 0, 1 \rangle$ .
- b) Znaleźć drogę, jaką przebędzie ciało poruszające się z prędkością o równaniu  $v(t) = v_0 + at$  między chwilą  $t_1 = 2$  s a chwilą  $t_2 = 5$  s ( $v_0 = 1$  m/s,  $a = 2$  m/s<sup>2</sup>).
- c) Prędkość ciała poruszającego się pod wpływem siły oporu proporcjonalnej do prędkości zależy od czasu jak  $v(t) = v_0 e^{-t/\tau}$ , ( $v_0, \tau$  - stałe). Proszę znaleźć całkowitą drogę, jaką przebędzie ciało w całym ruchu (czas biegnie od zera do nieskończoności).