ZESTAW 3

Mechanika i fizyka statystyczna FiIS-MiNwB-1 S1

Kontakt: Radosław Strzałka, pok. 315/D10, mail: `strzalka@fis.agh.edu.pl`
Zestawy dostępne pod adresem: `http://galaxy.agh.edu.pl/~strzalka/#dydaktyka#mifs_minwb`
Tematyka: II zasada Newtona, ruch z oporem i tarciem, ruch układu ciał połączonych, układy nieinercjalne.

1. Ciężarek o masie m zawieszono u sufitu na lince. Drugą linką przyczepiono ciężarek do pionowej ściany tak, że linka ta naciągnięta jest w poziomie siłą N. Oblicz kąt odchylenia od pionu linki spuszczonej z sufitu oraz jej napięcie.

2. [Hennel III.2.] Cząstka o masie $m = 3$ kg porusza się w polu siły $\vec{F}$ zależnej od czasu w następujący sposób: $\vec{F} = (15t, 3t - 12, -6t^2)$ N. Przyjmując warunki początkowe $\vec{r}_0 = (5, 2, -3)$ m, $\vec{v}_0 = (2, 0, 1)$ m/s znaleźć zależność położenia i prędkości od czasu.

3. Mały klocek kładziemy na równi pochyłej o kącie nachylenia α do poziomu. Znajdź przyśpieszenie klocka w ruchu w dół równi. Rozważ przypadek bez tarcia oraz z tarciem o współczynniku f. Jaki warunek musi spełniać kąt, przy danym tarciu, aby ruch klocka był możliwy?

4. Klocek o masie $m = 3$ kg i prędkości początkowej $v_0 = 6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ pchnięto w górę równi o kącie nachylenia $\alpha = 30°$ i wysokości $h = 1{,}5$ m. Jaki musi być współczynnik tarcia klocka o równię, aby nie wypadł on poza równię?

5. Chłopiec pcha pod górę o nachyleniu α sanki o masie m siłą skierowaną w dół względem zbocza góry pod kątem β, liczonym od poziomu (rys. 1). Współczynnik tarcia sanek o śnieg wynosi f. Ile wynosi siła F przyłożona przez chłopca, jeśli sanki poruszają się ruchem jednostajnym? Dla jakiego kąta β' chłopiec wepchnie sanki na szczyt górki po najkrótszym czasie, jeśli nadal przykłada siłę F.

6. [Hennel III.23.] Punkt materialny o masie m znajduje się na zboczu w kształcie paraboli $y = ax^2$ $(a > 0)$. Współczynnik tarcia jest równy f. Całość znajduje się w polu grawitacyjnym ziemskim. Znaleźć maksymalną wysokość h_{max}, na której punkt będzie pozostawać w spoczynku.

7. Dwie masy m_1, m_2 połączono liną, przerzuconą przez nieruchomy blok zaczepiony u sufitu, po którym lina może ślizgać się bez tarcia. Oblicz przyśpieszenie układu mas oraz naciąg liny.

8. [por. Hennel III.20 i III.21.] Na gładkim stole leży sznur o długości L, którego $1/n$-ta zwisa swobodnie ze stołu. Napisać równanie dynamiki sznura i (*) obliczyć czas, po którym cały sznur spadnie ze stołu. Przyjąć, że między sznurem a stołem występuje tarcie o współczynniku f.

9. [Hennel III.33.] Samochód o masie m jest hamowany siłą oporu $F = -kv^2$. Jaką drogę przebędzie samochód, zanim jego prędkość zmaleje do połowy? Komentarz (link).

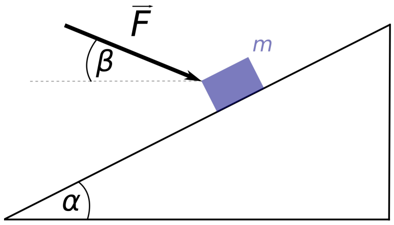
10.* [Irodow 1.38.] Ciało zsuwa się po powierzchni nachylonej pod kątem α do poziomu. Współczynnik tarcia k zależy od przebytej drogi x w następujący sposób: $k(x) = bx$, gdzie b jest dodatnim współczynnikiem. Znaleźć drogę x, po przebyciu której klocek się zatrzyma, oraz maksymalną prędkość klocka na tej drodze.

11. Winda rusza w górę (lub w dół) z przyśpieszeniem a_0. Jakie jest wskazanie wagi sprężynowej ustawionej na podłodze windy, przy pomocy której ważymy masę m?

12. Na dużym, ciężkim klocku o masie M leży klocek o masie m_1, który z prawej strony połączono linką ze zwisającym klockiem m_2 $(m_2 > m_1)$. Z jakim przyśpieszeniem a_0 musiałby poruszać się w prawo duży klocek M, aby klocek m_1 pozostał w spoczynku? Rozważyć przypadek z tarciem i bez tarcia.

13. Klocek o masie m znajduje się na wewnętrznej ściance lejka w kształcie odwróconego stożka o kącie rozwarcia 2α, w odległości r od osi lejka. Lejek wiruje wokół osi ze stałą częstością ω. Jaka może być największa i najmniejsza graniczna częstość, aby klocek spoczywał na ściance lejka, jeśli współczynnik tarcia między klockiem a lejkiem wynosi f?

14. W miejscowości, której szerokość geograficzna wynosi $\varphi = 50°$ strzelamy do tarczy umieszczonej w odległości $L = 500$ m. Pocisk porusza się ruchem prawie jednostajnym, a jego prędkość na całej drodze wynosi $v = 500$ m/s. Proszę znaleźć odchylenie pocisku od toru prostoliniowego wynikające z przyśpieszenia Coriolisa. Rozważyć dwa przypadki, gdy tor strzelania znajduje się:
    (a) na linii północ-południe,
    (b) na linii wschód-zachód.



Rysunek 1: rys. do zad. 5.

Komentarz do zad. 9

Krótki przepis na rozwiązanie tego typu zadania (rozwiązanie równania różniczkowego):
Równanie dynamiki, $ma = -kv^2$, które chcielibyśmy rozwiązać ze względu na zależność $v(t)$, jest tzw. równaniem różniczkowym, bo niewiadoma, $v(t)$, występuje w postaci pochodnej. Najprostszą metodą rozwiązywania równań różniczkowych jest metoda przez zwykłe całkowanie. Równanie trzeba sobie jednak wcześniej odpowiednio przygotować, zanim przystąpi się do całkowania. W tym celu używa się tzw. metody *separacji zmiennych.*
Rozważmy przykład matematyczny:
Niech nasze równanie różniczkowe na niewiadomą $y(x)$ będzie postaci:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x)h(y) \tag{1}$$

gdzie $g(x)$ oraz $h(y)$ są jakimiś funkcjami zmiennych x i y, odpowiednio. Zakładamy tutaj, że prawą stronę równania da się w ten sposób przedstawić. Potencjalnymi dwiema zmiennymi, po których możemy całkować, są właśnie x i y. Metoda separacji zmiennych polega na tym, że przekształcamy równanie (1) tak, żeby wszystkie zależności zmiennej x były np. po prawej stronie równania, a wszystkie zależności y - po lewej. W naszym przypadku:

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x)h(y)\ \right|\cdot \mathrm{d}x\ \ :h(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = g(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

Teraz możemy obustronnie całkować nasze równanie (każdą stronę „po swojej zmiennej"):

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = \int g(x)\mathrm{d}x \tag{3}$$

Całka może być nieoznaczona lub oznaczona w wybranych granicach, np. $x : x_0 \to x_1$, $y : y_0 \to y_1$. W przypadku zadania chcemy znaleźć rozwiązanie $v(t)$, a więc będziemy całkować po prędkości i czasie.