

ZESTAW 10

WSTĘP DO FIZYKI KWANTOWEJ

Kontakt: Radosław Strzałka, pok. 315/D10, mail: strzalka@fis.agh.edu.pl

Zestawy dostępne pod adresem: http://galaxy.agh.edu.pl/~strzalka/#dydaktyka#wdfk_ft

Tematyka: Operator momentu pędu i kwadratu momentu pędu, równanie własne i funkcje własne operatora kwadratu momentu pędu.

10.1. Operator momentu pędu we współrzędnych kartezjańskich

Przy pomocy klasycznej definicji zapisać moment pędu jako $\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}$ (składowa i -ta algebraicznie: $\hat{L}_i = \varepsilon_{ijk} x_j \hat{p}_k$, gdzie $i, j, k = \{x, y, z\}$).

- (a) Znajdź reguły komutacji składowych operatora momentu pędu: $[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{L}_k$.
- (b) Znajdź reguły komutacji $[\hat{L}_i, x_j]$ oraz $[\hat{L}_i, \hat{p}_j]$.
- (c) Operator kwadratu momentu pędu jest zdefiniowany następująco: $\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$. Sprawdź reguły komutacji $[\hat{L}_i, \hat{L}^2]$.

10.2. Równanie własne operatorów $\hat{L}_z$ i $\hat{L}^2$

- (a) Operator momentu pędu we współrzędnych sferycznych. Wprowadźmy współrzędne sferyczne:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases}, \quad \begin{matrix} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{matrix}$$

Wyprowadź składowe operatora momentu pędu oraz operatora kwadratu momentu pędu we współrzędnych sferycznych. Ewentualnie: wychodząc z postaci w zmiennych sferycznych, dojdź do postaci w zmiennych kartezjańskich.

- (b) Rozwiąż równanie własne składowej $\hat{L}_z$ momentu pędu i wprowadź liczbę kwantową m .
- (c) Zapisz równanie własne operatora kwadratu momentu pędu $\hat{L}^2$ i podaj rozwiązanie za pomocą funkcji specjalnych (harmoniki sferyczne $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ i stowarzyszone wielomiany Legendre'a $P_l^m(\cos \theta)$). Wprowadź liczbę kwantową l . Dokładna postać tych funkcji (unormowanych):

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l$$
$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \left[\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

10.3. Laplasjan we współrzędnych sferycznych

- (a) Zdefiniuj postać operatora Laplace'a $\Delta_{r,\theta,\varphi}$ we współrzędnych sferycznych i wyraż ją przez postać operatora kwadratu momentu pędu $\hat{L}^2$.
- (b*) Postać operatora Laplace'a w dowolnym krzywoliniowym układzie współrzędnych można zapisać przy pomocy tensora metrycznego $\hat{g}$. Przy pomocy tego tensora można zapisać kwadrat elementu długości: $(ds)^2 = \hat{g}_{ij} dx^i dx^j$. Laplasjan jest zdefiniowany jako: $\Delta_g = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{g} \hat{g}^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}$, gdzie $g = \det(\hat{g})$, $\hat{g}^{ij} = (\hat{g}_{ij})^{-1}$. Znajdź postać tensora metrycznego oraz laplasjanu w zmiennych sferycznych.

10.4. Zadania

- (a) Wykorzystując powyższe wzory obliczyć $Y_{00}, Y_{10}, Y_{1,\pm 1}$.
- (b) Wykazać bezpośrednim rachunkiem, że funkcje $Y_{00} = \text{const}, Y_{10} = C \cdot \cos \theta, Y_{1,\pm 1} = C \cdot \sin \theta e^{\pm i\varphi}$ są rozwiązaniem równania własnego zarówno dla $\hat{L}^2$ jak i $\hat{L}_z$.
- (c) Znaleźć unormowaną postać funkcji Y_{00}, Y_{10} (uwaga na jacobian w całce po kątach) i porównać stałą normującą ze wzorem w zad. 10.2.c.
- (d) [Brojan 1.2. zad. 11] Obliczyć średnią wartość $\hat{L}_z^2$ w stanie opisywanym funkcją falową $\psi = \sqrt{\frac{4}{3\pi}} \sin^2(\varphi)$.
- (e) [Brojan 1.2. zad. 12] Obliczyć $\langle \hat{L}^2 \rangle_\psi$ w stanie opisywanym funkcją falową $\psi = A \sin \theta \cos \varphi$.
- (f) Sprawdzić, że parzystość harmonik sferycznych jest następująca: $Y_{lm}(-\vec{r}) = (-1)^l Y_{lm}(\vec{r})$.