

# ZESTAW 2

## WSTĘP DO FIZYKI KWANTOWEJ I STATYSTYCZNEJ

Kontakt: Radosław Strzałka, pok. 315/D10, mail: [strzalka@fis.agh.edu.pl](mailto:strzalka@fis.agh.edu.pl)

Zestawy dostępne pod adresem: [http://galaxy.agh.edu.pl/~strzalka/#dydaktyka#fkis\\_ft](http://galaxy.agh.edu.pl/~strzalka/#dydaktyka#fkis_ft)

Tematyka: katastrofa w nadfiolecie, promieniowanie ciała doskonale czarnego.

### 2.1. Wzór Rayleigha-Jeansa. Katastrofa w nadfiolecie

- [Baj IV.1., por. notatki do wykładu] Proszę rozważyć sześcienną wnękę rezonansową o boku  $L$ . Jaka jest liczba fal stojących o częstotliwości z przedziału  $[\nu, \nu + d\nu]$  zamkniętych we wnęcie? Założyć sztywne warunki brzegowe (znikanie fal na ściankach).
- Na podstawie punktu (a) znaleźć gęstość energii promieniowania we wnęcie (wzór Rayleigha-Jeansa). Średnia energia fotonu dana jest zasadą ekwipartycji energii ( $\bar{\epsilon} = k_B T$ ,  $k_B$  - stała Boltzmanna). Jaka jest idea katastrofy w nadfiolecie?

### 2.2. Rozkład Plancka dla ciała doskonale czarnego (c.d.cz.)

- Proszę przyjąć, że energia fali jest skwantowana ( $E = nh\nu$ ) i znaleźć wyrażenie na średnią liczbę kwantów promieniowania o częstotliwości  $\nu$ , przy założeniu, że prawdopodobieństwo powstania we wnęcie fali stojącej dane jest rozkładem Boltzmanna  $P(E) \propto e^{-E/k_B T}$ ,  $k_B$  - stała Boltzmanna (będziemy często oznaczać też przez  $k$ ). Chodzi o wzór  $\bar{n} = \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$ , który znajdujemy stosując statystyczną definicję wartości oczekiwanej zmiennej  $n$  podlegającej (nieunormowanemu) rozkładowi prawdopodobieństwa o gęstości  $P(E)$ . Korzystając z powyższego oraz z rozwiązania zad. 2.1.b podać rozkład Plancka dla c.d.cz. (wzór:  $\rho_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} d\nu$ ). Jaka jest rola temperatury?
- [Irodow2 1.15.] Proszę dokonać przejścia między wyrażeniem na całkowitą zdolność emisyjną c.d.cz. w funkcji częstotliwości i długości fali promieniowania.
- [Irodow2 1.14.] Zbadać asymptotykę rozkładu Plancka w granicy małych i dużych częstotliwości fali. Czy katastrofa w nadfiolecie nadal ma miejsce?
- Wyprowadzić prawo Wiena (wzór na długość fali  $\lambda_{max}$  o maksymalnej mocy promieniowania). Równanie, które się dostanie, będzie nieanalityczne - chodzi tylko o pokazanie zależności  $\lambda(T)$ . Można spróbować rozwiązać problem graficznie (np. przy pomocy portalu <http://www.wolframalpha.com>) i znaleźć mniej więcej wartość stałej Wiena.
- Znaleźć częstotliwość  $\nu_{max}$ , dla której rozkład ma maksimum (przybliżenie dużych energii!). Następnie obliczyć  $\nu_{max} \cdot \lambda_{max}$  ( $\lambda_{max} = \frac{hc}{5k_B T}$ ). Dlaczego  $\nu_{max} \cdot \lambda_{max} \neq c$ ?
- [Irodow2 1.17.] Obliczyć za pomocą wzoru Plancka:
  - ile razy wzrosło widmowe natężenie promieniowania o długości fali  $\lambda = 0,6 \mu\text{m}$ , gdy  $T$  wzrasta od 2000 K do 2300 K;
  - zdolność emisyjną w przedziale długości fal, różniących się nie więcej niż o 0,5% od najbardziej prawdopodobnej długości fali, gdy  $T = 200$  K.

### 2.3. Prawo Stefana-Boltzmanna

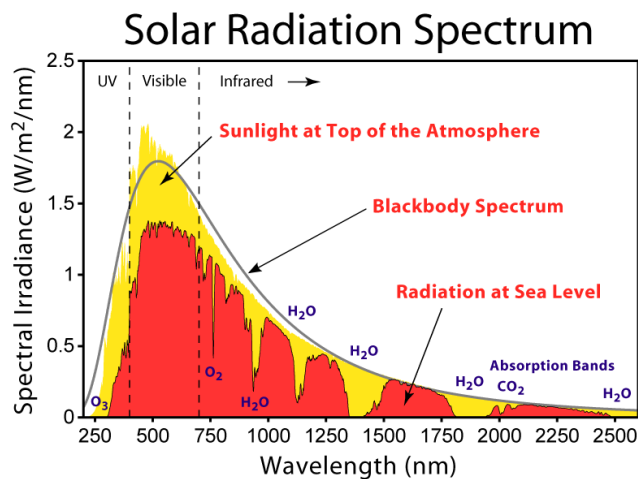
- [Irodow2 1.1.] Udowodnij związek między zdolnością emisyjną (inaczej: całkowitą mocą promieniowania) c.d.cz.  $R_T(\nu)$  z gęstością energii  $\rho_T(\nu)$ , daną rozkładem Plancka:  $R_T(\nu)d\nu = \frac{c}{4}\rho_T(\nu)d\nu$ .
- Wyprowadź prawo Stefana-Boltzmanna, czyli zależność zdolności emisyjnej c.d.cz. od temperatury  $R_T = \sigma T^4$ . W szczególności oblicz wartość stałej  $\sigma$ . W rachunkach pojawią się całki nieanalityczne, których rozwiązania proszę odnaleźć w tablicach całek.
- W ściance promieniującej wnęki o temperaturze 6000 K wywiercono otwór o średnicy 10 mm. Oblicz moc wychodzącego przez ten otwór promieniowania o długościach fal z zakresu 5500-5510 Å.

### 2.4. Temperatura powierzchni Słońca

- Znając stałą słoneczną ( $S = 1368 \text{ W/m}^2$ ), odległość Ziemi od Słońca (149,6 mln km), średnicę kątową Słońca widzianego z Ziemi (ok 32') oraz stałą Stefana-Boltzmanna (zad. 2.3.b), obliczyć temperaturę powierzchni Słońca. Założyć, że widmo promieniowania słonecznego jest widmem c.d.cz..
- Na rysunku poniżej (Rysunek 1) można znaleźć rozkład widmowy promieniowania słonecznego docierającego do Ziemi (ponad atmosferą i na poziomie oceanu). Proszę na podstawie kilkunastu punktów odczytanych z rysunku odtworzyć kształt rozkładu i zrobić dopasowanie krzywej Plancka z temperaturą jako parametrem dopasowania - w ten sposób odnaleźć temperaturę powierzchni Słońca. Rozważyć 2 serie danych - z wykresu

dla poziomu oceanu oraz ponad atmosferą. Dla tej pierwszej serii wziąć pod uwagę długości fal niezaabsorbowane przez atmosferę. Stałe w liczniku wzoru Plancka można także potraktować jako parametr (drugi, i wtedy potraktować jednostki na osi pionowej wykresu jako arbitralne). Dopasowania można dokonać w dowolnym programie to umożliwiającym (Origin, Matlab, Mathematica itp.). Proszę porównać otrzymaną wartość teoretyczną z wartością otrzymaną w punkcie (a) oraz wartością rzeczywistą (znalezioną w źródłach internetowych).

*Ciekawostka. Proszę zauważyć, jak duże jest pochłanianie w atmosferze promieniowania o określonych długościach fali.*



Rysunek 1: Rysunek do zad. 2.4.b.