

# ZESTAW 3

## WSTĘP DO FIZYKI KWANTOWEJ I STATYSTYCZNEJ

Kontakt: Radosław Strzałka, pok. 315/D10, mail: [strzalka@fis.agh.edu.pl](mailto:strzalka@fis.agh.edu.pl)

Zestawy dostępne pod adresem: [http://galaxy.agh.edu.pl/~strzalka/#dydaktyka#fkis\\_ft](http://galaxy.agh.edu.pl/~strzalka/#dydaktyka#fkis_ft)

Tematyka: teoria Bohra atomu.

### 3.1. Model Bohra atomu

- Na podstawie postulatów Bohra proszę stworzyć kwantowy model budowy atomu wodoropodobnego (tj. znaleźć kwantowanie energii, promienia orbity, prędkości na orbicie oraz częstości obiegu wokół jądra dla elektronu).
- Proszę obliczyć wartości powyższych wielkości dla 1. orbity atomu wodoru. W szczególności proszę sprawdzić jakim ułamkiem prędkości światła jest prędkość elektronu.
- Dla jakiego atomu (wodoropodobnego) prędkość elektronu na 1. orbicie staje się relatywistyczna?
- Wyprowadzić wzór na długość fali wyemitowanego promieniowania przy przejściach elektronu między orbitami  $k$  i  $m$  w atomie wodoru (wzór Rydberga). Obliczyć stałą Rydberga  $Ry$ . Jakie są granice serii Lymana, Balmera, Paschena itd.?
- Pod linkiem <http://spektrus.software.informer.com/1.0/> można znaleźć darmowy program edukacyjny ilustrujący widma emisyjne różnych atomów. Korzystając z tego programu proszę znaleźć energie (długości fal) przejść z zakresu światła widzialnego dla atomu wodoru i ustalić, między którymi poziomami przejścia te występują. Do jakiej serii należą?
- [Irodow 5.9.] Proszę rozpatrzyć argumenty przeciwko atomowej teorii Bohra, obliczyć czas, po jakim elektron z pierwszej orbity spadłby na proton w atomie wodoru. Zgodnie z klasyczną elektrodynamiką szybkość strat energii na promieniowanie wynosi

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} a^2,$$

gdzie  $a$  jest przyspieszeniem dośrodkowym elektronu (założenie). Powyższy wzór nosi nazwę *wzoru Larmora* na moc wypromieniowaną przez poruszający się z przyspieszeniem ładunek (patrz: Griffiths rozdziały 11.1.4. oraz 11.2.1).

### 3.2. Oscylator harmoniczny w modelu Bohra [Irodow 5.10.]

Proszę na podstawie postulatów Bohra znaleźć skwantowane poziomy energetyczne cząstki poruszającej się w polu centralnym o energii potencjalnej oscylatora harmonicznego:

$$U = \frac{kr^2}{2}.$$

### 3.3. Model Bohra-Sommerfelda, poprawka na eliptyczne orbity, poprawka relatywistyczna<sup>1</sup>

Rozszerzeniem modelu Bohra na przypadek orbit eliptycznych (jak w grawitacji) jest poprawka zaproponowana przez Sommerfelda (1916 r.). Podał on uogólniony postulat kwantowania w postaci ( $q_i$  to współrzędna uogólniona, a  $p_i$  - odpowiadający jej pęd uogólniony):

$$\oint_{\Gamma} p_i dq_i = n_i \cdot h$$

- Oblicz powyższą całkę dla współrzędnych  $q_i = \theta$  (współrzędna kątowa, wtedy  $p_{\theta} \equiv L = I\omega = mr^2 \frac{d\theta}{dt}$ , odpowiadająca liczba kwantowa:  $n_{\theta}$ ) oraz  $q_i = r$  (współrzędna radialna, wtedy  $p_r = m \frac{dr}{dt}$ , odpowiadająca liczba kwantowa:  $n_r$ ). Załóż równanie toru w postaci krzywej stożkowej:  $r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \theta}$ , gdzie  $p, \epsilon$  - parametry.
- Zapisz energię całkowitą w polu centralnym (po krzywej stożkowej):  $E = -\frac{Z^2 k^2 m e^4}{2L^2} (1 - \epsilon^2)$  z użyciem liczb kwantowych  $n_{\theta}$  i  $n_r$ , aby otrzymać uogólniony wzór na energię elektronu w atomie na orbicie eliptycznej. Pokaż, że wzór redukuje się do wzoru Bohra dla orbity kołowej ( $n_{\theta} = 0$ ).

W powyższym wyprowadzeniu użyliśmy wzoru klasycznego (nierelatywistycznego) na energię. Gdyby zastosować wzór relatywistyczny:  $E = c\sqrt{p_r^2 + \left(\frac{p_{\theta}}{r}\right)^2} + (mc)^2 - mc^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ , po bardziej złożonych rachunkach dostalibyśmy w przybliżeniu do pierwszej poprawki relatywistycznej (rzędu  $(v/c)^2$ ) wzór Bohra-Sommerfelda:

$$E_{n,l} = -\frac{Z^2 mc^2 \alpha^2}{2n^2} \left[ 1 + \frac{Z^2 \alpha^2}{n^2} \left( \frac{n}{l+1} - \frac{3}{4} \right) \right]$$

gdzie  $\alpha = \frac{ke^2}{\hbar c} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \frac{e^2}{2\epsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137}$  to tzw. stała struktury subtelnej;  $n/l$  - główna/orbitalna liczba kwantowa.

<sup>1</sup>Zajmiemy się tym zadaniem, jeżeli będzie czas

- (c) Oblicz wielkość poprawki relatywistycznej do energii (w eV) dla orbit głównych (tj. dla różnych  $n$ , ale  $l = 0$ ) atomów: wodoru, krzemu, złota, uranu.
- (d) Podaj strukturę subtelną wodoru dla trzech pierwszych  $n$  (i wszystkich możliwych  $l$ ), tj. wypisz energie  $E_{10}, E_{20}, E_{21}, E_{30}, E_{31}, E_{32}$ . Podaj wielkość rozszczepienia  $\frac{1}{\lambda} = \frac{E}{hc}$  (w  $\text{cm}^{-1}$ ) między stanami o skrajnych  $l$  na drugiej i trzeciej orbicie.