

ZESTAW 7

WSTĘP DO FIZYKI KWANTOWEJ

Kontakt: Radosław Strzałka, pok. 315/D10, mail: strzalka@fis.agh.edu.pl

Zestawy dostępne pod adresem: http://galaxy.agh.edu.pl/~strzalka/#dydaktyka#fkis_ft

Tematyka: Równanie Schrödingera. Próg i nieskończona studnia potencjału, potencjał periodyczny. Kombinacja liniowa stanów.

7.1. Równanie Schrödingera

- (a) [Baj V.1.] Metodą separacji zmiennych, proszę rozwiązać zależne od czasu 1-wymiarowe równanie Schrödingera dla potencjału $V = V(x)$ (potencjał nie zależy od czasu). Jakie jest rozwiązanie r. Schrödingera niezależnego od czasu dla cząstki swobodnej?
- (b) Proszę wykazać, że równanie Schrödingera jest liniowe. Następnie sprawdzić czy superpozycja $\psi + \psi^*$ spełnia r. Schrödingera.
- (c) [Baj V.2.] Na podstawie równania Schrödingera udowodnić równanie ciągłości prądu prawdopodobieństwa

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \text{div} \vec{j}(\vec{r}, t) = 0,$$

gdzie gęstość prądu prawdopodobieństwa: $\vec{j}(\vec{r}, t) = -\frac{i\hbar}{2m}(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$, a gęstość prawdopodobieństwa: $\rho(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2$. Rozważyć przypadek 1-wymiarowy.

- (d) Obliczyć gęstość prądu prawdopodobieństwa dla cząstki swobodnej o pędzie p (przypadek 1D).
- (e) Rozważmy funkcję falową postaci: $\psi(x, t) = f(x)e^{-iat}$, gdzie $f(x)$ jest funkcją rzeczywistą, zaś a jest rzeczywistą stałą. Pokazać, że dla funkcji $\psi(x, t)$ gęstość prądu prawdopodobieństwa wynosi $j(x, t) = 0$.
- (f) Postać r. Schrödingera można wyprowadzić z funkcji Hamiltona dla cząstki klasycznej (niekwantowej) stosując zasady odpowiedniości i komplementarności (w szczególności wprowadzając reprezentację operatorową pędu i położenia). Proszę spróbować wyprowadzić postać r. Schrödingera (przypadek 1D) inaczej, na podstawie tylko następujących założeń:
- chcemy dostać równanie falowe, które jest spełnione dla fali płaskiej o równaniu $\psi(x; k) = e^{i(kx - \omega t)}$,
 - wprowadzamy kwantyzację: $E = \hbar\omega = \hbar\nu$ oraz $p = \hbar k = \frac{h}{\lambda}$,
 - całkowita energia cząstki jest sumą (klasycznej) energii kinetycznej $E_k = \frac{p^2}{2m}$ i energii potencjalnej $V(x)$.

7.2. Próg potencjału [Eisberg & Resnick 6.3.-6.4.]

Cząstka o masie m i energii $E > 0$ pada na próg potencjału ($V_0 > 0$):

$$V(x) = \begin{cases} V_0, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

- (a) Proszę znaleźć rozwiązania r. Schrödingera (niezależnego od czasu) dla tej cząstki. Rozważyć trzy przypadki: $E > V_0$, $E < V_0$, $E = V_0$.
- (b) Proszę znaleźć współczynniki transmisji T i odbicia R cząstki na progu potencjału:

$$T = \frac{j_{\text{transmitted}}}{j_{\text{incident}}}, \quad R = \frac{j_{\text{reflected}}}{j_{\text{incident}}}$$

gdzie j_{incident} , $j_{\text{transmitted}}$, $j_{\text{reflected}}$ to gęstości prądów prawdopodobieństwa cząstki padającej, po przejściu przez próg i odbitej od progu. *Komentarz.* Z zad. 7.1.d wiemy, że gęstość prądu prawdopodobieństwa dla fali biegnącej wynosi $j = \frac{\hbar k}{m}|A|^2$, gdzie A jest amplitudą funkcji falowej. Zatem dla fali biegnącej stosunek gęstości prądów prawdopodobieństwa (czyli współczynniki R i T) są dane przez stosunki kwadratów amplitud ważone liczbami falowymi w odpowiednich obszarach.

- (c) Rozważmy bardzo małą cząstkę kurzu o promieniu $r = 10^{-6}$ m i gęstości $\rho = 10^4$ kg/m³, która porusza się z prędkością $v = 10^{-2}$ m/s. Proszę oszacować (np. na poziomie względnego prawdopodobieństwa 5% lub 50%) głębokość wnikania Δx , gdy cząstka ta uderza w próg potencjału o wysokości dwukrotnie większej od jej energii kinetycznej przed zderzeniem.

7.3. Nieskończona studnia potencjału [Eisberg & Resnick 6.8.]

Cząstka o masie m porusza się w jednowymiarowym polu sił o energii potencjalnej:

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & |x| > a \\ 0, & |x| \leq a \end{cases}$$

- [Baj V.18. lub Brojan 1.1. zad. 4] Proszę znaleźć poziomy energetyczne i unormowane funkcje falowe.
- Proszę sprawdzić, czy funkcje własne przynależne do różnych wartości własnych są ortogonalne (*).
- Obliczyć prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w obszarze $\frac{a}{3} \leq x \leq \frac{2a}{3}$ dla pierwszego stanu wzbudzonego ($n = 2$).
- Jaka jest wartość średnia położenia i pędu w stanie podstawowym? (**)
- [por. Brojan 1.1. zad. 34] Cząstka znajduje się w stanie opisywanym funkcją falową $\psi(x) = \sqrt{\frac{4}{3a}} \cos^2(\pi x/2a)$. Obliczyć średnią energię kinetyczną cząstki w tym stanie. (***)
- [por. Brojan 1.1. zad. 37] Znaleźć prawdopodobieństwo otrzymania wartości energii stanu podstawowego w jamie potencjału dla stanu opisanego funkcją falową $\psi(x)$ z punktu 7.3.e.
- Jak zmienia się rozwiązanie z punktu (a) w przypadku niesymetrycznej studni (np. $x \in [0, L]$)?

7.4. Kombinacja liniowa stanów stacjonarnych

- Rozważyć niezależne od czasu równanie Schrödingera. Wiadomo, że funkcje $\varphi_1(x)$ oraz $\varphi_2(x)$ są rozwiązaniami tego równania o odpowiadających im energiach $E_1 = E_2 = E$ (o takiej sytuacji mówimy: degeneracja stanów). Pokazać, że będąca kombinacją liniową funkcja

$$\varphi_3(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$$

jest także rozwiązaniem tego równania, zaś odpowiadająca jej energia wynosi $E_3 = E$. Jaka jest fizyczna interpretacja stałych c_1 i c_2 ?

- Odpowiadająca chwili początkowej funkcja falowa pewnego stanu jest następującą kombinacją liniową dwóch pierwszych stanów stacjonarnych dla cząstki w nieskończonej, niesymetrycznej studni potencjału o szer. a :

$$\Psi(x, 0) = A [\psi_1(x) + e^{i\phi}\psi_2(x)],$$

gdzie ϕ jest pewną stałą. Znormalizować $\Psi(x, 0)$. Obliczyć $\Psi(x, t)$, $|\Psi(x, t)|^2$ jako funkcje sinusoidalne czasu t i częstości $\omega = \pi^2\hbar/(2ma^2)$. Obliczyć $\langle x \rangle_\Psi$ i pokazać, że miara ta oscyluje w czasie. Znaleźć częstość i amplitudę tych oscylacji. Jakie wartości energii można uzyskać w wyniku pomiaru? Jakie jest prawdopodobieństwo uzyskania każdej z nich? Znaleźć wartość oczekiwaną $\hat{H}$? Uzyskany wynik porównać z wartościami E_1 i E_2 .

7.5. Potencjał periodyczny [podobne do Brojan 1.1. zad. 27]

Funkcję falową cząstki poruszającej się w potencjale periodycznym $V(x) = V(x + a)$ można zapisać w postaci

$$\psi(x) = e^{ikx}u(x).$$

Proszę udowodnić, że funkcja $u(x)$ musi być wtedy periodyczna, tzn. $u(x) = u(x + a)$. Wykorzystać postać operatora translacji $\hat{T}_a = e^{a\frac{\partial}{\partial x}}$, którą wyprowadziliśmy na zajęciach (zad. 1.2.(d)).

Przydatne całki

$$\begin{aligned} (*) \quad & \int \sin(nx) \sin(mx) dx = \frac{n \sin(mx) \cos(nx) - m \cos(mx) \sin(nx)}{m^2 - n^2} \\ & \int \cos(nx) \cos(mx) dx = \frac{m \sin(mx) \cos(nx) - n \cos(mx) \sin(nx)}{m^2 - n^2} \\ & \int \sin(nx) \cos(mx) dx = \frac{m \sin(mx) \sin(nx) + n \cos(nx) \cos(mx)}{m^2 - n^2} \\ (**) \quad & \int x \sin^2(kx) dx = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{8k^2} \cos(2kx) - \frac{1}{4k} x \sin(2kx) \\ & \int x \cos^2(kx) dx = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{8k^2} \cos(2kx) + \frac{1}{4k} x \sin(2kx) \\ (***) \quad & \int \cos^2(kx) \cos(2kx) dx = \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{4k} \sin(2kx) + \frac{1}{16k} \sin(4kx) \right) \end{aligned}$$